Brojevni sustavi

Uvod

Brojevni sustav je način zapisivanja brojeva i njihovog tumačenja. U uporabi je **položajni brojevni sustav**. To je sustav kod kojeg položaj znamenke u zapisu određuje njezinu vrijednost. Svaki je brojevni sustav određen vlastitim skupom znamenaka, a ukupan broj različitih znamenaka naziva se **bazom brojevnog sustava**. Baza brojevnog sustava se obično zapisuje kao indeks nakon samog broja (zapis 102_{10} označava da je broj 102 zapis u dekadskom brojevnom sustavu; zapis 101010001_2 označava broj zapisan u binarnom brojevnom sustavu).

Brojevni sustav kojim svakodnevno radimo jest **dekadski** brojevni sustav. Osnova tog brojevnog sustava je broj **10**, a za zapis se koriste znamenke **0..9**.

Binarni brojevni sustav ima bazu **2**, a koriste se znamenke **0** i **1**.

Oktalni brojevni sustav ima bazu **8**, a koriste se znamenke **0..7**.

Heksadekadski brojevni sustav ima bazu **16**, a koriste se znamenke **0..9, A..F** (A= 10, B= 11, ..., F= 15).

Primjetimo - znamenke koje se koriste u nekom brojevnom sustavu su od 0 do (baza-1).

U svakom brojevnom sustavu vrijedi da svaka znamenka u nizu ima jedinstvenu **težinsku vrijednost**. Težinska se vrijednost svake znamenke dobije na način da se osnova brojevnog sustava potencira eksponentom čija vrijednost ovisi o položaju znamenke. Krajnje desni eksponent ima vrijednost 0, predzadnji ima 1, itd...

Primjer:

$6457_{10} = 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

$23A5_{16} = 2 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$

Preračunavanje iz dekadskog i u dekadski brojevni sustav

Preračunavanje broja u dekadski sustav je jako jednostavno - načelom rastavljanja broja na težinske vrijednost moguće je svaki broj iz bilo kojeg brojevnog sustava pretvoriti u njegovu dekadsku protuvrijednost.

Primjer:

$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 10_{10}$

$102_8 = 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 1 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = 66_{10}$

$AB1_{16} = 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 1 \cdot 1 = 2737_{10}$

Postupak preračunavanja broja u dekadskom brojevnom sustavu u neki drugi se provodi na slijedeći način: provodimo cjelobrojno dijeljenje, tj. broj koji želimo preračunati dijelimo bazom sustava u koji želimo preračunati broj, pri čemu ostatak pri dijeljenju zapisujemo sa strane. Dalje dijelimo broj koji smo dobili pri dijeljenju sa bazom sustava u koji želimo preračunati broj, te ostatak zapisujemo na mjesto lijevo od znamenke koju smo dobili kao ostatak pri dijeljenju u prethodnom koraku. Postupak ponavljamo sve dok pri dijeljenju ne dobijemo 0.

Primjer 1:

	OSTATAK
25: 2 = 12	1
12 : 2 = 6	0
6: 2 = 3	0
3 : 2 = 1	1
1 : 2 = 0	1

$25_{10} = 11001_2$

Primjer 2:

	OSTATAK
726 : 16 = 45	6
45 : 16 = 2	13 = D
2 : 16 = 0	2

$726_{10} = 2D6_{16}$

Sa racionalnim brojevima postupamo drugačije. Broj za početak podijelimo na cijeli i decimalni dio. Cijeli dio dijelimo sa bazom u koju želimo preračunati broj (postupamo kako je već prije navedeno), a decimalni dio broja množimo bazom u koji želimo preračunati broj. Cijeli dio tog broja je znamenka u "novom" sustavu. Ako je broj jednak ili veći od 1, onda dalje SAMO decimalni dio množimo opet sa bazom. Postupak ponavljamo dok za decimalni dio ne dobijemo 0.

Primjer 3:
2.25 treba preračunati u binarni brojevni sustav.

$2.25 = 2 + 0.25$

Cijeli dio preračunamo u binarni sustav na koji je već prije opisano.

$2_2 = 10_{10}$

Sada decimalni dio broja množimo sa 2.

$0.25 \cdot 2 = \mathbf{0}.5$
$0.5 \cdot 2 = \mathbf{1}.0$

$0.25_{10} = 0.01_2$

$2.25_{10} = 10.01_2$

Ponekad broj ne možemo zapisati sa konačno mnogo znamenki. Tada je broj ili periodičan ili nije periodičan. U slučaju da je periodičan, to zapisujemo kao i u dekadskom sustavu, sa povlakom iznad dijela koji se ponavlja, npr. $101.110\overline{101}_2$.

Racionalan broj zapisan u binarnom sustavu preračunavamo u dekadski na način da svaka znamenka desno od decimalne točke ima negativne težinske vrijednosti, od -1, pa nadalje. Cijeli dio broja preračunavamo u dekadski kako je već prije opisano.

Primjer 4:

$10.01_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 2 + 0 + 0 + 0.25 = 2.25_{10}$

Pretvorba iz binarnog u oktalni i obrnuto

Binarni brojevni sustav ima bazu 2, a oktalni sustav ima bazu $8 = 2^3$. Iz te činjenice slijedi da će jedna znamenke oktalnog sustava zamjeniti tri znamenke binarnog sustava.

2	8
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Primjeri:

$123_8 = 001010011_2 =$ (nule na početku broja možemo odbaciti!) $= 1010011_2$

$7235_8 = 111010011101_2$

$23410_0 = 010011100001000_2 = 100111000010000_2$

Pretvorba iz binarnog brojevnog sustava u oktalni se provodi na način da znamenke grupiramo u trojke znamenaka, počevši od krajnje desne. U slučaju da nam krajnje lijeva skupina nema tri znamenke, nadopunjujemo je nulama koje stavljamo na početak zapisa. Nakon grupiranja u trojke, iz tablice iščitamo i zapišemo zapis te trojke u oktalnom sustavu.

Primjeri:

$10111101_2 = 10'111'101_2 =$ (krajnje lijevi grupu nadopunimo) $= 010'111'101_2 = 275_8$

$1110110111_2 = 001'110'110'111_2 = 1667_8$

$101111011000_2 = 101'111'011'000_2 = 5730_8$

Pretvorba iz binarnog u heksadekadskog i obrnuto

Binarni brojevni sustav ima bazu 2, a heksadekadski sustav ima bazu $16 = 2^4$. Iz te činjenice slijedi da će jedna znamenke heksadekadskog sustava zamjeniti četiri znamenke binarnog sustava.

2	16
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Primjeri:

$10A_{16} = 000100001010_2 =$ (nule na početku broja možemo odbaciti!) $= 100001010_2$

Pretvorba iz binarnog brojevnog sustava u heksadekadski se provodi na način da znamenke grupiramo u četvorke znamenaka, počevši od krajnje desne. U slučaju da nam krajnje lijeva skupina nema četiri znamenke, nadopunjujemo je nulama koje stavljamo na početak zapisa. Nakon grupiranja u četvorke, iz tablice iščitamo i zapišemo zapis te četvorke u heksadekadskom sustavu.

Primjeri:

$110101000_2 = 1'1010'1000_2 =$ (krajnje lijevu grupu nadopunimo!) $= 0001'1010'1000_2 = 1A8_{16}$

$101110111011_2 = 1011'1011'1011_2 = BBB_{16}$

Binarno zbrajanje

Zbrajanje dvaju bitova provodi se po pravilima za zbrajanje dvaju bitova:

$0 + 0$	$= 0$
$0 + 1$	$= 1$
$1 + 0$	$= 1$
$1 + 1$	$= 0$ i 1 dalje

Prijenos (1 dalje) se prenosi na susjedni stupac sa lijeve strane.

Pogledajmo kako ti izgleda na primjeru:

Primjer 1:

prijenos	1	1		1	1	
		1	1	0	1	1
+			1	0	1	1
=	1	0	0	1	1	0

Promotrimo stupac po stupac, sa desne na lijevo!

$1 + 1 = 0$ (prenosimo 1)

$1 + 1 = 0$ (prenosimo 1) +1 (koju smo prenijeli!) $= 1$

$0 + 0 = 0 + 1$ (koju smo prenijeli!) $= 1$

$1 + 1 = 0$ (prenosimo 1)

$1 + 1$ (koju smo prenijeli!) $= 0$ (prenosimo 1)

Primjer 2:

prijenos	1	1	1	1			
		1	1	1	1	0	0
+				1	1	1	0
=	1	0	0	1	0	1	0

Postupak računanja je analogan prijašnjem primjeru!

Binarno oduzimanje

Oduzimanje brojeva se može svesti na zbrajanje metodom dvojnog komplementa. Da bi to bilo moguće, umanjitelj moramo pretvoriti u negativan broj.

Primjerice, $5 - 3 = 5 + (-3)$

Negativni se brojevi u binarnom sustavu predočuju pomoći dvojnog komplementa. Postupak dobivanja dvojnog komplementa je slijedeći:

- Umanjenik i umanjitelj treba svesti na jednaki broj znamenaka na način da se umanjitelju doda s lijeve strane potreban broj nula
- Svaku 0 umanjenika treba pretvoriti u 1, a svaku 1 u 0 (tako dobiveni broj se zove **komplement broja**)
- Komplementu treba pribrojiti 1 (tako dobiveni broj se zove **dvojni komplement**)

Zbrojimo umanjenik i dvojni komplement, te odbacimo krajnje lijevu 1 da bi rezultat bio ispravan. Time je binarno oduzimanje gotovo.

Primjer:

Izračunajmo: $11011_2 - 1011_2$

Prvo primjetimo da umanjenik ima 5 znamenaka, a umanjitelj 4. Stoga treba umanjitelja dopuniti sa 0: 01011_2.

Komplement tog broja je 10100_2, a dvojni komplement je $10100_2 + 1_2 = 10101_2$.

Zbrojimo sada umanjenika i dvojni komplement: $11011_2 + 10101_2$. Na kraju još samo odbacimo krajnje lijevu 1 da bismo dobili ispravan rezultat!

prijenos		1	1	1	1	1	
umanjenik			1	1	0	1	1
dvojni komplement	+		1	0	1	0	1
=		1	1	0	0	0	0
RAZLIKA			1	0	0	0	0

Binarno množenje

Množenje binarnih brojeva također se svodi na zbrajanje, samo moramo veliku pozornost posvetiti potpisivanju znamenaka!

U binarnom sustavu množimo kao i u dekadskom, ali zbrajanje provodimo u binarnom sustavu.

Primjer 1:

prijenos	1	1	1						
		1	1	1	*	1	0	1	0
			0	0	0				
				1	1	1			
+					0	0	0		
=	1	0	0	0	1	1	0		

Primjer 2:

$$11101_2 \cdot 1000_2 = 11101000_2$$

Zadatci za vježbu

1. Rastavi brojeve na težinske vrijednosti i preračunaj u dekadski sustav:

1. 325_{10}
2. 100010_2
3. 5423_8
4. 1020_3
5. $ABA1_{16}$

2. Preračunaj brojeve iz dekadskog sustava u traženi sustav:

1. 723_{10}, u bazu 2
2. 1234_{10}, u bazu 8
3. 120_{10}, u bazu 16
4. 321_{10}, u bazu 2
5. 15423_{10}, u bazu 16

3. Preračunaj brojeve iz binarnog sustava u dekadski i obrnuto:

1. 12.125_{10}
2. 1001.1001_2
3. 32.21875_{10}
4. 111.111_2
5. 0.375_{10}

4. Preračunaj brojeve iz binarnog u oktalni i obrnuto:

1. 10011_2
2. 1110011_2
3. 561_8
4. 1002_8
5. 111_2

5. Preračunaj brojeve iz binarnog u heksadekadski i obrnuto:

1. 10001_2
2. 11110_2
3. $AC0_{16}$
4. $5DA_{16}$
5. 11_2

6. Preračunaj brojeve iz heksadekadskog sustava u oktalni i obrnuto:

1. $AB1_{16}$
2. 124_{16}
3. 320_8
4. 1000_{16}
5. 2117_8

7. Izračunaj:

1. $10001_2 + 11001_2$
2. $11001_2 + 1001_2$
3. $111001_2 + 11111_2$
4. $11011_2 + 10010_2$
5. $10101_2 + 10101_2$

8. Izračunaj:

1. $1110_2 - 110_2$
2. $10010_2 - 111_2$
3. $10101_2 - 1011_2$
4. $1001_2 - 10_2$
5. $11000_2 - 1111_2$

9. Izračunaj:

1. $1001_2 \cdot 101_2$
2. $1110_2 \cdot 111_2$
3. $1001_2 \cdot 10_2$
4. $1100_2 \cdot 110_2$
5. $10_2 \cdot 1111_2$