Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Josip Kličinović

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog

Diplomski rad

Zagreb, srpanj 2009.

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Josip Kličinović

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, srpanj 2009.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____

2. ____

3. ____

Zahvaljujem se prof.dr.sc. Željki Milin-Šipuš na svesrdnoj pomoći i vodstvu pri izradi ovog rada, svim profesorima i asistentima sa Fakulteta prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojih područja Sveučilišta u Splitu gdje sam započeo svoje visokoškolsko obrazovanje, kao i svim profesorima i asistentima sa Prirodoslovno-matematičkog fakulteta-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu na kojem sam uspješno završio školovanje.

Velika zahvala ide mojoj obitelji i prijateljima na pomoći, strpljenju i potpori tijekom studiranja.

Kraj jednog puta znači početak drugog. Nadam se da ću svoje znanje prenositi novim generacijama sa jednakom strašću i sposobnošću kao što su ga drugi prenijeli meni.

Sadržaj

Popis slika

Sažetak

U prvom se poglavlju ovog rada izgrađuje osnova prostora Minkowskog. Zadaje se pseudonorma te se definiraju različiti tipovi vektora. Definira se pseudonorma vektora i vektorski produkt. Također se definira baza prostora $\mathbb{R}^3_1$.

U drugome se poglavlju definiraju krivulje u prostoru Minkowskog, specijalno regularne krivulje te se daju osnovni rezultati diferencijalne geometrije prostora Minkowskog.

U trećem se poglavlju definiraju plohe te se prostor Minkowskog detaljnije obrađuje kroz diferencijalnu geometriju. Posebno se definiraju fundamentalne forme te Gaussova i srednja zakrivljenost ploha.

U četvrtom, posljednjem poglavlju ovog rada se posebno promatraju pravčaste plohe. Poglavlje započinje definicijom pravčastih ploha, a nakon toga su dani primjeri pravčastih ploha, uz poseban naglasak na četiri minimalne pravčaste plohe u prostoru Minkowskog.

Uvod

Prije nekoliko tisućljeća je slavni Euklid u 13 knjiga sakupio svo dotadašnje znanje iz geometrije. Nazvao ih je *Elementi*. U prvoj od navedenih knjiga Euklid je naveo 5 aksioma geometrije, među njima možda i najpoznatiji aksiom paralelnosti. Aksiomi, kao temeljne istine, moraju zadovoljiti princip neovisnosti (odnosno da se ne mogu izvesti iz drugih aksioma), princip neproturječnosti i princip potpunosti (odnosno da postoji dovoljan broj aksioma da se može izgraditi svaka matematička teorija). Matematičari su jako dugo vremena pokušavali pokazati da je aksiom paralelnosti zbilja aksiom. Na temeljima tih pokušaja i pogrešaka se 2 tisućljeća nakon izdavanja Elemenata izgradila jedna nova geometrija. Geometriju koju je Euklid "sagradio" počela se nazivati *euklidska geometrija*, a sve ostale koje su lišene aksioma paralelnosti su nazvane *neeuklidske geometrije*. Iako nepravedno "optuživane" da su apstraktne i da ne mogu opisati živi svijet oko nas, zapravo jako lijepo opisuju našu stvarnost. Na primjer, poznato je u da u euklidskoj geometriji vrijedi da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°. U sfernoj geometriji (jednoj vrsti neeuklidske geometrije) to nije tako. Najjednostavnije je to vidjeti na primjeru globusa: ukoliko na globusu nacrtamo dovoljno veliki trokut, primjetit ćemo da je zbroj unutrašnjih kutova tog trokuta veći od 180°. Danas je poznato mnogo vrsta neeuklidske geometrije: hiperbolička geometrija, projektivna geometrija, sferna geometrija, taxicab geometrija...

Kada je Albert Einstein 1905. izdao svoje djelo o teoriji relativnosti, Minkowski je primjetio da se može matematički opisati prostor u kojem bi teorija relativnosti "živjela". Svoj rad je temeljio na već prije objavljenim radovima Lorentza i Poincaréa. Minkowski je svoj rad najbolje opisao slijedećim riječima: "Od sada su vrijeme i prostor kao takvi osuđeni na propast i jedino će njihovo zajedništvo očuvati neovisnu stvarnost". Naime, u svom radu je Minkowski predložio 4D sustav, odnosno, poznati nam 3D prostor spojen sa vremenom (3+1)D. Zbog jednostavnosti se obično promatra (2+1)D sustav. S obzirom da je sada svakom elementu prostora pridodana i vremenska komponenta uobičajeno je da se u prostoru Minkowskog točka ne naziva točka, već *događaj*. Ima smisla! Ne putujemo samo kroz prostor, mi ujedno putujemo i kroz vrijeme. Ipak, jednostavnosti radi, u radu se neće govoriti o događajima, nego o točkama.

Popularizaciji ideje da je prostor oko nas ustvari "slijepljen" s vremenom, odnosno da se radi o prostorno-vremenskom kontinuumu najviše su pridonijele znanstveno-fantastične emisije, filmovi i serije. Najpoznatija je Zvjezdane staze u kojoj se često spominje navedeni kontinuum. Štoviše, mnogi znanstvenici smatraju da Zvjezdane staze i nisu toliko daleko od istine i da je takozvani warp pogon, odnosno putovanje brže od brzine svjetlosti, moguć jedino u prostoru Minkowskog. U Zvjezdanim stazama se često spominju i singulariteti, točke u kojima se prostor-vrijeme jako izobliči i kroz njih ili je nemoguće ili je jako opasno putovati. Podsjetimo se, u geometriji je sigularna točka ona u kojoj prva derivacija iščezava, odnosno u kojoj nema tangente, pa nema ni brzine.

Cilj ovog rada je postepeno "izgraditi" prostor Minkowskog, obuhvatiti opći pregled diferencijalne geometrije krivulje u prostoru Minkowskog i opširniji pregled diferencijalne geometrije ploha u prostoru Minkowskog. Zatim se svi dobiveni rezultati primjenjuju na pravčastim plohama, a posebno je zanimljivo vidjeti minimalne plohe u prostoru Minkowskog. Naime, u Euklidskom prostoru postoje samo dvije minimalne pravčaste plohe - ravnina i helikoid. U prostoru Minkowskog postoje čak četiri minimalne pravčaste plohe.

Poglavlje I

Prostor Minkowskog

1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija I.1. *Prostor definiran kao uobičajeni trodimenzionalni realni vektorski prostor koji se sastoji od uređenih trojki* $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ *i na kojemu je definirana operacija*

$$< x, y >_1 := -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{1.1}$$

zove se prostor Minkowskog *ili* Lorentzov prostor.

Prostor Minkowskog označavamo sa $\mathbb{R}^3_1$.

S obzirom da smo prostor $\mathbb{R}^3_1$ definirali kao realni vektorski prostor slijedi da zbrajanje dvaju vektora i množenje vektora skalarom provodimo na uobičajeni način, tj. vrijedi

- $+ : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1; a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \qquad a, b \in \mathbb{R}^3_1$
- $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1; \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^3_1$

U prostoru $\mathbb{R}^3$ definiramo skalarni produkt $< x, y > := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. U daljnjem razmatranju ćemo vidjeti da tako definirani skalarni produkt i *naš* produkt (I.1) nemaju jednaka svojstva. Zbog toga relaciju (I.1) zovemo *pseudoskalarni produkt.*

Podsjetimo se koja svojstva mora zadovoljiti operacija da bismo je nazvali *skalarnim produktom* (u prostoru $\mathbb{R}^3$):

(i) *pozitivna definitnost*:

$$< x, x > \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$
$$< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(ii) *komutativnost*:

$$< x, y > = < y, x > \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

(iii) *kvaziasocijativnost*:

$$< \alpha x, y > = \alpha < x, y > \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

(iv) *distributivnost zbrajanja*:

$$< x + y, z >=< x, z > + < y, z > \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$$

Pogledajmo svojstva pseudoskalarnog produkta:

(i) *komutativnost*:

$$\begin{aligned} < x, y >_1 &= -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= -y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = \\ &=< y, x >_1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3_1 \end{aligned}$$

(ii) *kvaziasocijativnost*:

$$\begin{aligned} < \alpha x, y >_1 &= -\alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \alpha x_3y_3 = \\ &= \alpha(-x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \\ &= \alpha < x, y >_1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^3_1 \end{aligned}$$

(iii) *distributivnost zbrajanja*:

$$\begin{aligned} < x + y, z >_1 &= -(x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + (x_3 + y_3)z_3 = \\ &= -x_1z_1 - y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 + x_3z_3 + y_3z_3 = \\ &= (-x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) + (-y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3) = \\ &=< x, z >_1 + < y, z >_1 \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3_1 \end{aligned}$$

(iv) *pozitivna definitnost*:

općenito ne vrijedi!

Primjećujemo da se skalarni i pseudoskalarni produkt razlikuju upravo u tome je li funkcija pozitivno definitna uvijek ili nije. Pokažimo to na primjeru.

Primjer I.1.

$$\begin{aligned} a &= (3, 2, 1) \rightarrow < a, a >_1 = -4 \\ b &= (1, 2, 3) \rightarrow < b, b >_1 = 12 \\ c &= (2, 0, 2) \rightarrow < c, c >_1 = 0 \end{aligned}$$

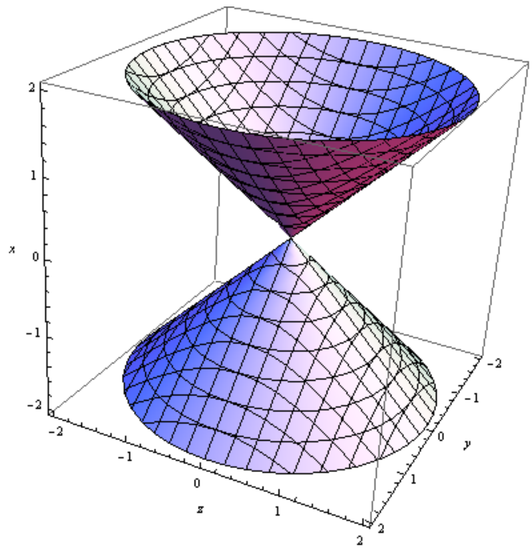
Primjerom I.1 smo pokazali da pseudoskalarni produkt nije uvijek pozitivno definitan. S obzirom na rezultat tog produkta razlikujemo tri vrste vektora:

- **prostorni vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 > 0$
- **vremenski vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 < 0$
- **svjetlosni vektor** ili **izotropni** ili **nul vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 = 0$

Napomena: U daljnjem radu se neće govoriti o uređenoj trojci $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_1$, već o uređenoj trojci $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1$.

Skup svih svjetlosnih vektora u $\mathbb{R}^3_1$ naziva se *svjetlosni stožac*, te je predstavljen implicitnom jednadžbom

$$\{(x, y, z)|x^2 = y^2 + z^2, x \neq 0\}$$



Slika 1.1: Svjetlosni stožac

2 Pseudonorma vektora

Prirodno nas zanima na koji ćemo način u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ mjeriti duljinu vektora. Prije ćemo se podsjetiti mjerenja vektora u prostoru $\mathbb{R}^3$ te ćemo onda analogijom izvesti formulu za duljinu vektora u prostoru Minkowskog.

Podsjetimo se: za svaki je vektor $x \in \mathbb{R}^3$ njegov skalarni produkt sa samim sobom (odnosno skalarni kvadrat) nenegativan, tj. $< x, x >\geq 0$, pa je dobro definiran broj $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$, gdje treba uzeti pozitivnu vrijednost korijena. Taj broj nazivamo *norma vektora* x.

Osnovna svojstva norme su:

(i) *pozitivna definitnost*: $\|x\| \geq 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}^3$

(ii) *strogost*: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) *homogenost*: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3$

(iv) *nejednakost trokuta*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$

Već smo prije vidjeli da u prostoru Minkowskog općenito ne vrijedi pozitivna definitnost pseudoskalarnog produkta, što je sada smetnja za uspješno definiranje norme. Međutim, ukoliko zahtjevamo apsolutnu vrijednost pseudoskalarnog produkta, dobit ćemo traženu pozitivnu definitnost:

$$\|x\|_1 := \sqrt{| < x, x >_1 |} \tag{2.1}$$

Relaciju 2.1 nazivamo *pseudonorma vektora*.

Ovako definirana norma u $\mathbb{R}^3_1$ ima slijedeća svojstva:

(i) *pozitivna definitnost*: $\|x\|_1 \geq 0$, što slijedi izravno iz definicije

(ii) *strogost*:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 = 0 &\Leftrightarrow | < x, x >_1 | = 0 \\ &\Leftrightarrow < x, x >_1 = 0 \\ &\not\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vektor c u primjeru I.1 je primjer vektora koji nije nul-vektor, a pseudoskalarni produkt (a samim time i pseudonorma vektora) je 0.

(iii) *homogenost*:

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1 &= \sqrt{| < \alpha x, \alpha x >_1 |} = \\ &= \sqrt{|\alpha^2| \cdot | < x, x >_1 |} = \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|_1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3_1 \end{aligned}$$

(iv) *nejednakost trokuta*: u prostoru Minkowskog nejednakost trokuta općenito ne vrijedi što ćemo pokazati primjerom.

U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ nejednakost trokuta se dokazuje uz pomoć nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog. U prostoru $\mathbb{R}^3_1$ nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog općenito ne vrijedi, pa ne vrijedi ni nejednakost trokuta.

Primjer I.2.

$$\begin{aligned} x = (1,2,3), y &= (2,3,4) \\ |< x, y >_1| &= 18 \\ \|x\|_1 &= \sqrt{12} \\ \|y\|_1 &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |< x, y >_1| &\leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_1 \\ 18 &\leq \sqrt{12} \cdot \sqrt{21} \approx 15.87 \end{aligned}$$

Dobivena relacija nije istinita te smo ovim primjerom pokazali da postoje vektori u $\mathbb{R}^3_1$ za koje nejednakost C-S-B ne vrijedi, pa time ne vrijedi ni nejednakost trokuta.

Pogledajmo sada primjer kada to vrijedi:

Primjer I.3.

$$\begin{aligned} x = (1,0,5), y &= (1,2,1) \\ |< x, y >_1| &= 4 \\ \|x\|_1 &= \sqrt{24} \\ \|y\|_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |< x, y >_1| &\leq \|x\|_1 \cdot \|y\|_1 \\ 4 &\leq 2 \cdot \sqrt{24} \approx 9.8 \end{aligned}$$

Ovim smo primjerom pokazali da postoje vektori u $\mathbb{R}^3_1$ za koje nejednakost C-S-B vrijedi, pa time vrijedi i nejednakost trokuta.

Definirajmo još i okomitost vektora i jedinični vektor u $\mathbb{R}^3_1$:

Definicija I.2. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3_1$. Kažemo da je x* ortogonalan *na y ako je $< x, y >_1 = 0$.*

Uočimo da je u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ svaki izotropan vektor okomit na samog sebe.

Definicija I.3. *Za vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je* jedinični *ako vrijedi $|< x, x >_1| = 1$.*

3 Vektorski produkt

Definicija I.4. *Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3_1$ je funkcija $\times_1 : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ koja paru vektora $a, b \in \mathbb{R}^3_1$ pridružuje vektor $a \times_1 b \in \mathbb{R}^3_1$ određen zahtjevom*

$$< a \times_1 b, c >_1 = det(a, b, c) \qquad \forall c \in \mathbb{R}^3_1 \tag{3.1}$$

Ukoliko stavimo:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, b_3) \\ b &= (b_1, b_2, b_3) \\ c &= (c_1, c_2, c_3) \\ a \times_1 b &= (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

tada je

$$< a \times_1 b, c >_1 = -x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3. \tag{3.2}$$

S druge strane, razvojem determinante po trećem retku dobijemo:

$$det(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1). \tag{3.3}$$

Izjednačavajući relacije (3.2) i (3.3) dobijemo:

$$\begin{aligned} x_1 &= -(a_2b_3 - a_3b_2) \\ x_2 &= -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ x_3 &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

Uočimo da ovaj modificirni vektorski produkt odgovara uobičajenom vektorskom produktu u euklidskom prostoru, samo što je prva koordinata suprotna predznaka.

Ukoliko kanonsku bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3_1$ (o tome više u 4. dijelu ovog poglavlja) označimo sa

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \tag{3.4}$$

tada vektorski produkt možemo izračunati na slijedeći način:

$$a \times_1 b = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{3.5}$$

Uočimo da je $a \times_1 b = 0$ ako i samo ako je $a = 0$ ili $b = 0$ ili su a i b kolinearni, tj. ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $a = \lambda b$.

Iz definicije vektorskog produkta i okomitosti vektora proizlazi da je vektor $a \times_1 b$ okomit na vektor a i b.

Zaista,

$$< a \times_1 b, a >_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Analogno

$$< a \times_1 b, b >_1 = 0.$$

Prisjetimo se da u euklidskom prostoru vrijedi Lagrangeov identitet, odnosno:

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2$$

Prirodno nas zanima vrijedi li nešto slično u prostoru $\mathbb{R}^3_1$. Uočimo najprije da je $\|a \times_1 b\|_1$ zapravo modul pseudoskalarnog kvadrata u $\mathbb{R}^3_1$, pa kako bismo izbjegli modul nećemo gledati pseudonormu već pseudoskalarni kvadrat.

Imamo:

$$\begin{aligned} < a \times_1 b, a \times_1 b > &= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= -(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

S druge strane imamo:

$$\begin{aligned} < a, a >_1 \cdot < b, b >_1 - < a, b >_1^2 &= (-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ &= a_1^2b_1^2 - a_1^2b_2^2 - a_1^2b_3^2 - a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 - a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + \\ &+ a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 = \\ &= -(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_3b_2 - a_2b_3)^2 \end{aligned}$$

Uspoređujući prethodne dvije relacije dobivamo:

$$\begin{aligned} &< a \times_1 b, a \times_1 b >_1 = -[< a, a >_1 \cdot < b, b >_1 - < a, b >_1^2] \\ &< a \times_1 b, a \times_1 b >_1 = < a, b >_1^2 - < a, a >_1 \cdot < b, b >_1 \end{aligned}$$

tj. dobili smo Lagrangeov identitet za $\mathbb{R}^3_1$. Koristeći Lagrangeov identitet ćemo pokazati: ako su vektori a i b jedinični i ortogonalni, onda je i vektor $c = a \times_1 b$ također jediničan.

Propozicija I.1. *Neka je $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ i neka je $< a, a >_1 = \varepsilon, < b, b >_1 = \eta, a \perp b$. Tada je $< c, c >_1 = -\varepsilon\eta$, gdje je $c = a \times_1 b$.*

Dokaz. Primjenimo Lagrangeov identitet:

$$\begin{aligned} < c, c >_1 &= < a \times_1 b, a \times_1 b >_1 = \\ &= < a, b >_1^2 - < a, a >_1 \cdot < b, b >_1 = \\ &= -\varepsilon\eta \end{aligned}$$

Kako iz pretpostavke propozicije znamo da je $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$, to nam slijedi da je i njihov umnožak također iz $\{-1, 1\}$, tj. korištenjem Lagrangeovog identiteta smo pokazali: ukoliko su vektori a i b jedinični i ortogonalni, onda je i njihov vektorski produkt također jednični vektor. □

4 Baza prostora $\mathbb{R}^3_1$

U prethodnom potpoglavlju (3.4) smo napisali da vektori $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ čine kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. Sada ćemo to i pokazati.

Teorem I.1. *Ortonormirani skup* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *u* $\mathbb{R}^3_1$ *čini jednu ortonormiranu bazu.*

Dokaz. Dokažimo najprije da dani vektori čine bazu, odnosno da su nekomplanarni.
U tu svrhu ćemo prvo pokazati da su okomiti vektori u prostoru $\mathbb{R}^3_1$ nekolinearni, odnosno $< e_1, e_2 >_1 = 0 \Rightarrow e_1$ i e_2 nekolinearni.
Pretpostavimo suprotno, tj. da su vektori e_1 i e_2 kolinearni, odnosno da postoji $\alpha \neq 0$ takav da je $e_2 = \alpha e_1$.

$$0 =< e_1, e_2 >_1 =< e_1, \alpha e_1 >_1 = \alpha < e_1, e_1 >_1 \Rightarrow \alpha = 0 \qquad \lightning\lightning$$

čime smo dobili kontradikciju. Dakle, u prostoru Minkowskog nam vrijedi da su okomiti vektori nekolinearni.

Nadalje, kako je $e_3 = e_1 \times_1 e_2$ vrijedi:

$$< e_1, e_3 >_1 =< e_2, e_3 >_1 = 0$$

Imamo, dakle, da su vektori e_1, e_2, e_3 međusobno okomiti. Pokažimo sada da su nekomplanarni u prostoru Minkowskog.

Pretpostavimo:

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0. \tag{4.1}$$

Moramo pokazati da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Pomnožimo relaciju (4.1) pseudoskalarno sa e_1:

$$\begin{aligned} < \alpha e_1, e_1 >_1 + < \beta e_2, e_1 >_1 + < \gamma e_3, e_3 >_1 = 0 \\ \alpha < e_1, e_1 >_1 + \beta < e_2, e_1 >_1 + \gamma < e_3, e_1 >_1 = 0 \end{aligned}$$

Već prije smo pokazali

$$\begin{aligned} &< e_2, e_1 >_1 =< e_3, e_1 >_1 = 0 \\ &< e_1, e_1 >_1 = 1 \text{ ili } -1 (\text{jer je vektor } e_1 \text{ normiran}) \end{aligned}$$

Slijedi da je $\alpha = 0$.

Analogno dobijemo:

$$\begin{aligned} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{aligned}$$

Po Propoziciji I.1 je jasno da su vektori e_1, e_2, e_3 normirani, a sada smo pokazali da su i međusobno okomiti i čine linearno nezavisan skup. Iz toga slijedi da čine ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3_1$. $\square$

Napomena: Važno je primjetiti da se ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ sastoji od jednog vremenskog vektora i dva prostorna vektora.

Svaki vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ možemo na jedinstveni način prikazati kao linearnu kombinaciju vektora ortonormirane baze $\{e_1, e_2, e_3\}$, odnosno:

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \tag{4.2}$$

Izračunajmo α, β, γ.

Znamo (Propozicija I.1):

$$\begin{aligned} &< e_1, e_1 >_1 = \varepsilon \\ &< e_2, e_2 >_1 = \eta \\ &< e_3, e_3 >_1 = -\varepsilon\eta \end{aligned}$$

Pomnožimo relaciju (4.2) pseudoskalarno sa e_1:

$$< x, e_1 >_1 = < \alpha e_1, e_1 >_1 + < \beta e_2, e_1 >_1 + < \gamma e_3, e_1 >_1$$

te iskoristimo svojstvo da je pseudoskalarni produkt dvaju okomitih vektora jednak 0. U konačnici dobijemo:

$$< x, e_1 >_1 = \alpha < e_1, e_1 >_1 = \alpha\varepsilon$$

Znamo da je vektor e_1 normiran, odnosno da je $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, pa je $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ te je

$$\alpha = \varepsilon < x, e_1 >_1$$

Analognim postupkom dobijemo:

$$\begin{aligned} &\beta = \eta < x, e_2 >_1 \\ &\gamma = -\varepsilon\eta < x, e_3 >_1 \end{aligned}$$

Poglavlje II

Krivulje u prostoru Minkowskog

1 Definicija i reparametrizacija krivulja u prostoru Minkowskog

Definicija II.1. *Krivulja u* $\mathbb{R}^3_1$ *je* glatko preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *(odnosno: funkcija c je klase C^∞ na I), gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval.*

Napomena: Krivulja c je zadana parametarski sa $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)), t \in I$.

Definicija II.2. *Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je* regularna *ako je $\dot{c}(t) \neq 0, \forall t \in I$.*

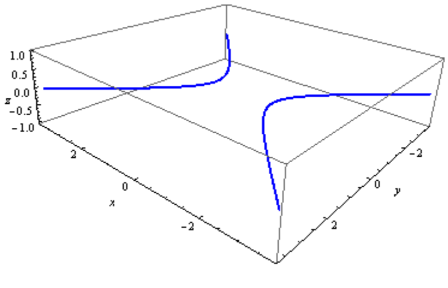
Definicija II.3. *Regularna krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ naziva se:*

$$\begin{cases} \text{prostorna krivulja} & \textit{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 > 0 \textit{ svugdje} \\ \text{vremenska krivulja} & \textit{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 < 0 \textit{ svugdje} \\ \text{svjetlosna ili izotropna ili nul-krivulja} & \textit{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 = 0 \textit{ svugdje} \end{cases}$$

Primjer II.1. *Hiperbola* $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ *ima parametrizaciju* $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$.

$$\dot{c}(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$$
$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -\sinh^2 t + \cosh^2 t = 1$$

Pokazali smo da je ova hiperbola prostorna krivulja.

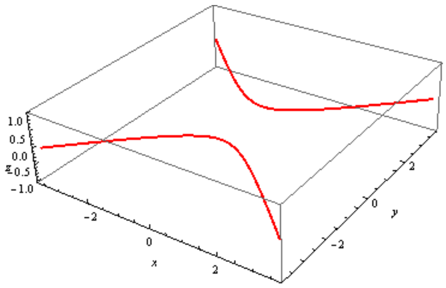


Slika 2.1: Prostorna hiperbola

Primjer II.2. *Hiperbola* $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ z = 0 \end{cases}$ *ima parametrizaciju* $c(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$.

$$\dot{c}(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$$
$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$$

Pokazali smo da je ova hiperbola vremenska krivulja.

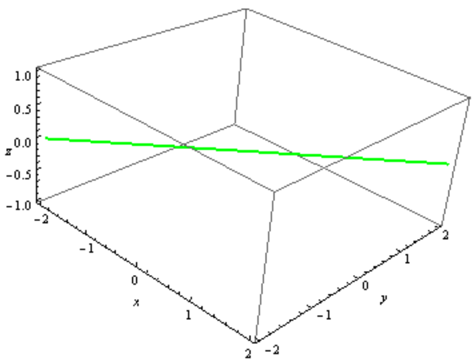


Slika 2.2: Vremenska hiperbola

Primjer II.3. *Pravac* $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ *ima parametrizaciju* $c(t) = (t, t, 0)$.

$$\dot{c}(t) = (1, 1, 0)$$
$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -t^2 + t^2 = 0$$

Pokazali smo da je ovaj pravac svjetlosna krivulja.



Slika 2.3: Svjetlosni pravac

Fizičari postojanje ovih tri vrsta krivulja definiraju na slijedeći način: ukoliko se gibamo po vremenskoj krivulju putujemo brzinom većom od brzine svjetlosti; ukoliko se gibamo po svjetlosnoj krivulji putujemo brzinom jednakom brzini svjetlosti; ukoliko se gibamo po prostornoj krivulji putujemo brzinom manjom od brzine svjetlosti.

U diferencijalnoj je geometriji neke rezultate lakše dobiti ako krivulju reparametriziramo na način da je njena tangenta u svakoj točki jedinična. Sada ćemo pokazati da je to moguće za svaku krivulju u prostoru Minkowskog.

Definicija II.4. *Kažemo da je krivulja* $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1, \widetilde{I} \subseteq \mathbb{R}$, reparametrizacija krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *ako postoji glatka bijekcija* $\varphi : \widetilde{I} \to I$ *kojoj je inverz gladak (tj. funkcija je glatki difeomorfizam) i za koju vrijedi* $\widetilde{c}(\widetilde{t}) = c(\varphi(\widetilde{t})) = c(t)$.

Napomena: Očito je reparametrizacija $\widetilde{c}$ opet krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ i graf od c se podudara sa grafom od $\widetilde{c}$, odnosno, vrijedi $c(I) = \widetilde{c}(\widetilde{I})$.

Napomena: Funkcija $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(t)\|_1 dt$ naziva se *funkcija duljine lûka.*

Definicija II.5. *Kažemo da je krivulja c parametrizirana duljinom lûka (PDL) ako vrijedi* $| < \dot{c}, \dot{c} >_1 | = 1$.

Primjetimo: Ako je krivulja parametrizirana duljinom lûka, odnosno ako je $| < \dot{c}, \dot{c} >_1 | = 1$, onda je duljina lûka između točaka a i b jednaka $s(t) = \displaystyle\int_a^b \|\dot{c}\|_1 dt = \int_a^b dt = b - a$.

Lema II.1. *Svaka se regularna krivulja* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *može reparametrizirati duljinom lûka. Preciznije:*

- *ako je* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *regularna krivulja koja je prostorna, tada postoji reparametrizacija* $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1$ *od c koja je također prostorna, odnosno* $< \dot{\widetilde{c}}(s), \dot{\widetilde{c}}(s) >_1 = 1, \forall s \in \widetilde{I}$
- *ako je* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *regularna krivulja koja je vremenska, tada postoji reparametrizacija* $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1$ *od c koja je također vremenska, odnosno* $< \dot{\widetilde{c}}(s), \dot{\widetilde{c}}(s) >_1 = -1, \forall s \in \widetilde{I}$

Dokaz. Za početak dokažimo da je reparametrizacija regularne krivulje ponovno regularna krivulja:

$$\dot{\widetilde{c}}(u) = \frac{d}{dt}(c \circ \varphi)(u) \cdot \frac{d}{du}\varphi(u) = \frac{d}{dt}c(t) \cdot \frac{d}{du}\varphi(u) = \frac{dc}{dt}(t) \cdot \frac{d\varphi}{du}(u) = \dot{c}(t) \cdot \dot{\varphi}(u),$$

a s obzirom je krivulja c regularna i da smo funkciju φ birali na način da bude regularna, zaključujemo da je i reparametrizacija također regularna krivulja.

Nadalje, treba pokazati da je reparametrizacija prostorne krivulje ponovno prostorna krivulja i da je reparametrizacija vremenske krivulje ponovno vremenska krivulja. Dokaz ćemo provesti samo za slučaj prostornih krivulja, a dokaz za vremenske krivulje se provodi analogno.

Daljni dokaz provodimo provodimo u 3 koraka:

1. Definiramo
$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(t)\|_1 dt,$$
pri čemu je $t_0 \in I$ proizvoljan, fiksan. Vrijedi:
$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{c}(t)\|_1 > 0,$$
jer je c regularna, pa je s strogo rastuća.

2. Stavimo $s : I \to J$. Promotrimo inverz funkcije s, $t = t(s)$. Vrijedi:
$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|_1} > 0.$$
Dakle, t je glatka strogo rastuća funkcija. Njome ćemo reparametrizirati!

3. Stavimo $\widetilde{c}(s) = (c \circ t)(s) = c(t(s))$. Tvrdimo da je $\widetilde{c}$ tražena reparametrizacija, tj. $< \dot{\widetilde{c}}, \dot{\widetilde{c}} >_1 = 1$.

Uvjerimo se u to direktnim računom:

$$\begin{aligned}
< \dot{\widetilde{c}}, \dot{\widetilde{c}} >_1 &=< (c \circ t)', c \circ t)' >_1 = \\
&=< \dot{c}(t(s))t'(s), \dot{c}(t(s))t'(s) >_1 = \\
&= [t'(s)]^2 < \dot{c}(t(s)), \dot{c}(t(s)) >_1 = \\
&= \left(\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|_1}\right)^2 \|\dot{c}(t)\|_1 = \\
&= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|_1} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ovime smo pokazali da je i krivulja d prostorna krivulja. □

2 Frenetov trobrid. Frenetove formule. Fleksija. Torzija.

U svakoj je točki P prostorne krivulje, s iznimkom singularnih točaka, moguće definirati tri pravca i tri ravnine, koje su međusobno okomite i sijeku se u točki P.

Definicija II.6.

1. ***Tangenta*** *je granični položaj sekante PN kada $N \to P$*

2. ***Normalna ravnina*** *je ravnina koja prolazi točkom P i okomita je na tangentu krivulje u točki P. Sve pravce koji leže u normalnoj ravnini i prolaze točkom P nazivamo* normalama krivulje *u točki P*

3. ***Oskulacijska ravnina*** *u točki P je granični položaj ravnine koja prolazi kroz tri bliske točke krivulje P, N i M, kada $N \to P, M \to P$*

4. ***Glavna normala*** *krivulje u točki P je presječnica normalne i oskulacijske ravnine u P*

5. ***Binormala*** *krivulje u točki P je onaj pravac koji prolazi točkom P i okomit je na oskulacijsku ravninu*

6. ***Ravnina rektifikacije*** *je ona ravnina koja sadrži tangentu i binormalu krivulje u točki P*

Primjetimo da tangenta krivulje c u točki P leži u oskulacijskoj ravnini. Nadalje, oskulacijska ravnina je razapeta glavnom normalom i tangentom; normalna je ravnina razapeta binormalom i glavnom normalom, a ravnina rektifikacije je razapeta tangentom i binormalom. Primjetimo također da su navedene ravnine međusobno okomite te da su navedeni pravci međusobno okomiti.

Definirajmo pobliže *Frenetov trobrid* ili *trobrid pratilac.*

Definicija II.7. *Neka je c prostorna ili vremenska krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ koja je parametrizirana duljinom luka i koja zadovoljava uvjet $< \ddot{c}, \ddot{c} >_1 \neq 0$. Frenetov trobrid ili trobrid pratilac je uređena trojka $\{T, N, B\}$, gdje su elementi T, N, B određeni sa:*

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \dot{c}(s) \\
N(s) &= \frac{\ddot{c}(s)}{\sqrt{| < \ddot{c}(s), \ddot{c}(s) >_1 |}} \\
B(s) &= T(s) \times_1 N(s)
\end{aligned}
$$

Primjetimo da smo ustvari definirali polje tangenti, glavnih normala i binormala krivulje c. Primjetimo nadalje da uređena trojka $\{T, N, B\}$ određuje jednu ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^3_1$, što slijedi iz definicije II.6, komentara na tu definiciju te činjenice da je vektorski produkt jediničnih vektora jedinični vektor koji je okomit na dane vektore.

Sada ćemo, bez dokaza, izreći teorem o Frenetovim formulama u prostoru Minkowskog.

Teorem II.1 (Frenetove formule). *Za polja T, N, B (definirana kao u definiciji II.7 vrijedi:*

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)\eta N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)\varepsilon T(s) - \kappa(s)\varepsilon\eta B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)\eta N(s), \end{aligned}$$

pri čemu su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ fleksija i torzija krivulje, a $|\eta| = | < N, N >_1 | = 1$.

Primjetimo da navedene formule formalno možemo zapisati u slijedećoj formi:

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\varepsilon & 0 & -\tau\varepsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Definirajmo sada zakrivljenosti prostornih krivulja u prostoru Minkowskog.

Fleksija

Iz Frenetovih formula (Teorem II.1) imamo

$$T' = \eta\kappa N. \tag{2.1}$$

Pomnožimo li jednadžbu (2.1) pseudoskalarno da N dobivamo

$$\begin{aligned} < T', N >_1 &= \eta\kappa < N, N >_1 = \\ &= \eta^2\kappa = \\ &= \kappa \end{aligned}$$

Iz Frenetovih formula i defincijije Frenetovog trobrida (Teorem II.1 i Definicija II.7) možemo zaključiti slijedeće:

$$\begin{aligned} & T' = \kappa\eta N \\ & \ddot{c} = \kappa\eta \frac{\ddot{c}}{\sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |}} \\ & \kappa\eta = \sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |} \\ & \kappa = \eta\sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |} = \eta\|\ddot{c}\|_1 \end{aligned}$$

Time smo dobili traženu formulu za računanje fleksije krivulje.

Primjetimo da fleksija κ može biti negativna ili pozitivna, a ovisi o psudoskalarnom produktu vektora normale ($< N, N >_1 = \eta \in \{-1, 1\}$). Ukoliko je on vremenski, onda je fleksija negativna, a ukoliko je prostorni, onda je fleksija pozitivna.

Geometrijska interpretacija fleksije je slijedeća: fleksijom se brojčano određuje mjera odstupanja krivulje od pravca u nekoj maloj okolini točke P, odnosno, fleksija mjeri brzinu promjene jediničnog tangencijalnog polja.

Torzija

Izvedimo formulu za torziju iz Defincije II.7 i Teorema II.1.

Znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= T \\
\ddot{c} &= T' = \kappa\eta N \\
\dddot{c} &= (\kappa\eta N)' = \\
&= \kappa'\eta N + \kappa\eta N' = \\
&= \kappa\eta(-\varepsilon\kappa T - \varepsilon\eta\tau B) = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta T - \varepsilon\eta^2\kappa\tau B = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta T - \varepsilon\kappa\tau B
\end{aligned}$$

Izračunajmo $det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})$:

$$\begin{aligned}
det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}) &= det(T, \kappa\eta N, -\varepsilon\kappa^2\eta T - \varepsilon\kappa\tau B) = \\
&= det(T, \kappa\eta N, -\varepsilon\kappa^2\eta T) + det(T, \kappa\eta N, -\varepsilon\kappa\tau B) = \\
&= det(T, \kappa\eta N, -\varepsilon\kappa\tau B) = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta\tau det(T, N, B) = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta\tau < T \times_1 N, B >_1 = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta\tau < B, B >_1 = \\
&= /\text{*Propozicija I.1*}/ = \\
&= -\varepsilon\kappa^2\eta\tau(-\varepsilon\eta) = \\
&= (-\varepsilon\eta)^2\kappa^2\tau = \\
&= \kappa^2\tau
\end{aligned}$$

Vrijedi:

$$\tau = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{\kappa^2} = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |}$$

Time smo dobili formulu za računanje torzije krivulje.

Geometrijska interpretacija torzije je slijedeća: torzijom se brojčano određuje mjera otklona krivulje, u maloj okolini točke P, od ravninske krivulje. Odnosno: torzijom se mjeri otklon krivulje od oskulacijske ravnine ILI torzija mjeri brzinu promjene polja binormala.

Za kraj ovog poglavlja ćemo definirati *ravninske krivulje*, te izreći (bez dokaza) propoziciju koja kaže kada je krivulja ravninska.

Definicija II.8. *Za krivulju* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *kažemo da je* ravninska krivulja *ako postoji ravnina* $\pi \subseteq \mathbb{R}^3_1$ *takva da je* $c(I) \subseteq \pi$.

Propozicija II.1. *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ *regularna krivulja parametrizirana duljinom luka bez singularnih točaka 1. reda. Krivulja je ravninska* $\Leftrightarrow \tau = 0$.

Primjetimo da je ovaj rezultat zapravo očit iz geometrijske interpretacije torzije krivulje.

Poglavlje III

Plohe u prostoru Minkowskog

1 Definicija plohe

Plohe su u prostoru Minkowskog definiraju na isti način kao i u Euklidskom prostoru. Vidjet ćemo da je većina rezultata analogna onima iz Euklidskog prostora, s razlikom definiranog (pseudo)skalarnog produkta.

Definicija III.1. *Podskup $S \subset \mathbb{R}^3_1$ je* ploha *ako za svaku točku $P \in S$ postoji otvorena okolina $V \in \mathbb{R}^3_1$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \in \mathbb{R}^2_1$ koje je*

(i) neprekidna bijekcija, kao što je i njegov inverz (tj. preslikavanje je homeomorfizam)

(ii) neprekidno derivabilno (tj. glatka funkcija)

Ako je i diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ injektivan, za plohu kažemo da je regularna.

Preslikavanje $\mathbf{x}$ zovemo *parametrizacijom* ili *kartom* okoline točke P plohe S.

Promotrimo diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$. Diferencijal je linearan operator $d\mathbf{x} : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^3_1$ u paru kanonskih baza prikazan Jacobijevom matricom

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Diferencijal je injektivan ako i samo ako je je njegova jezgra trivijalna, odnosno ako i samo ako je njegova slika dvodimenzionalna (ranga 2), odnosno ako i samo ako su vektori:

$$\mathbf{x}_u := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}; \mathbf{x}_v := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

linearno nezavisni. To će biti ako i samo ako vrijedi $\mathbf{x}_u \times_1 \mathbf{x}_v \neq 0$. Taj uvjet će nam omogućiti definiranje tangencijalne ravnine.

Plohu možemo prikazati na različite načina, npr. implicitnom, eksplicitnom, vektorskom, parametarskom jednadžbom. Primjetimo da je u prethodnom razmatranju i definiranju plohe upotrijebljena parametarska jednadžba plohe: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, gdje je $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2_1$.

Implicitno ćemo plohu zadati na slijedeći način:

Definicija III.2. *Skup* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : g(x, y, z) = c\}$ *gdje je* $c \in \mathbb{R}, S \subset \mathbb{R}^3_1$, $g : S \to \mathbb{R}$ *glatka funkcija nazivamo* plohom *ako je funkcija* g *takva da je* $\nabla g \neq 0, \forall P \in S$.

Napomena: Gradijent funkcije je definiran na slijedeći način: $\nabla g := (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$.

Eksplicitno plohu definiramo na slijedeći način:

Definicija III.3. *Skup* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : z = f(x, y)\}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2_1$ *otvoren i povezan, je regularna ploha.*

Definirajmo *jednostavne plohe.*

Definicija III.4. *Ploha koju je moguće pokriti samo jednom kartom naziva se* jednostavna ploha.

Jasno je da su plohe koje se u cijelosti mogu prikazati eksplicitnom jednadžbom jednostavne plohe. Naime, možemo definirati kartu $\mathbf{x} = (u, v, f(u, v))$ i ta karta pokriva cijelu plohu.

2 Tangencijalna ravnina

Ako u danoj točki P plohe S povučemo sve moguće krivulje na plohi onda tangente na te krivulje u točki P leže u jednoj ravnini koju nazivamo *tangencijalna ravnina* na plohu S u točki P. Izuzetak su singularne točke plohe.

Za praktične potrebe nije potrebno promatrati *sve* moguće krivulje. To je u ostalom nemoguće jer ih ima beskonačno mnogo. Dovoljno je promatrati dvije posebne krivulje, $u-$krivulju i $v-$krivulju koju dobijemo na način da fiksiramo parametar u i v u parametarskoj jednadžbi plohe. Jasno je da ćemo promatrajući te dvije krivulje dobiti dvije tangente. Tangencijalna je ravnina razapeta tim vektorima, a označavamo je sa T_PS. Iz ovoga je jasno da je $dimT_PS = 2$.

Promotrimo vektorsku jednadžbu plohe:

$$\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}.$$

Tangencijalna je ravnina razapeta vektorima

$$\overrightarrow{r}_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r}_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overrightarrow{k}$$

Ako je ploha zadana svojom implicitnom jednadžbom $F(x,y,z) = c$, onda je jednadžba tangencijalne ravnine u točki (x_0, y_0, z_0) dana sa

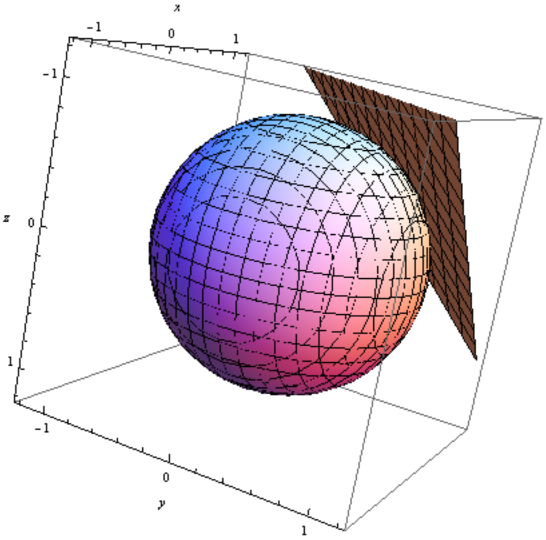
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

Ako je ploha zadana svojom parametarskom jednadžbom $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, onda je jednadžba tangencijalne ravnine u točki (x_0, y_0, z_0) dana sa

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix} = 0$$

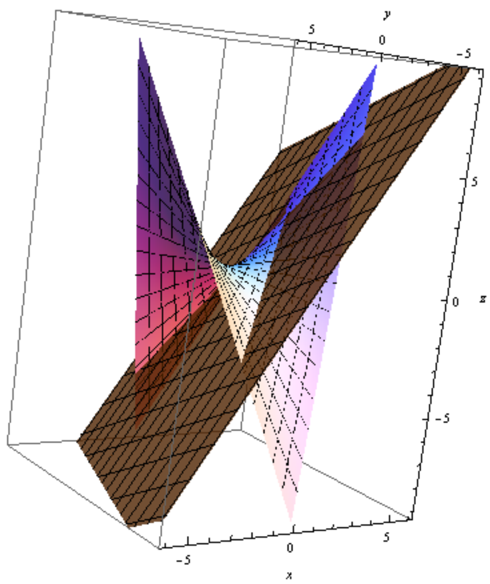
Napomena: U daljnjem ćemo radu, zbog jednostavnosti, umjesto $\frac{\partial x}{\partial u}$ pisati x_u. Analogno i za ostale parcijalne derivacije.

Primjer III.1. *Sfera radijusa* 1 *ima implicitnu jednadžbu* $x^2+y^2+z^2=1$. *Tangencijalna ravnina u točki* $P=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ *ima jednadžbu* $x+y+z=\sqrt{3}$.



Slika 3.1: Sfera i tangencijalna ravnina

Primjer III.2. *Hiperbolički paraboloid ima parametarsku jednadžbu* $(u+v,u-v,uv)$. *Tangencijalna ravnina u točki* $P(u=2,v=1)$ *ima jednadžbu* $3x-y-2z=4$.



Slika 3.2: Hiperbolički paraboloid i tangencijalna ravnina

3 Prva fundamentalna forma

Prije definiranja prve fundamentalne forme podsjetimo se da je tangencijalni prostor plohe u bilo kojoj točki P plohi M dvodimenzionalni prostor razapet vektorima x_u i x_v. Stoga nam slijedi da se bilo koji vektor tog prostora može prikazati kao linearne kombinacija tih dvaju vektora. Jasno, zbog regularnosti plohe u svakoj točki je definiran tangencijalni prostor T_PS.

Promotrimo bilo koja dva vektora $X, Y \in T_PS$. Oni su oblika

$$X = a \cdot f_u(u, v) + b \cdot f_v(u, v)$$

$$Y = c \cdot f_u(u, v) + d \cdot f_v(u, v).$$

Prvu fundamentalnu formu ćemo definirati analogno kao u euklidskom prostoru.

Definicija III.5. Prva fundamentalna forma *je simetrično bilinearno preslikavanje* $\mathbf{I} : T_PS \times T_PS \to \mathbf{R}$. *Odnosno, to je restrikcija danog pseudoskalarnog produkta na tangencijalnu ravninu* T_PS $\mathbf{I}(X, Y) :=< X, Y >_1$.

Napomena: Forma je simetrična ako vrijedi $\mathbf{I}(X, Y) = \mathbf{I}(Y, X)$, a bilinearna je ako je linearna u svakom argumentu.

Definicija III.6. *Neka je ploha M zadana parametarski sa $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Tada za plohu M definiramo funkcije $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ na slijedeći način:*

$$\begin{aligned} E &:=< f_u, f_u >_1= -x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &:=< f_u, f_v >_1= -x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &:=< f_v, f_v >_1= -x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

Veličine E, F, G definirane na navedeni način nazivamo Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvog reda *ili* koeficijentima prve fundamentalne forme.

Prvu fundamentalnu formu možemo opisati slijedećom simetričnom matricom:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Fundamentalne veličine imaju važnu ulogu u diferencijalnoj geometriji ploha jer u potpunosti određuju unutarnju geometriju plohe. Naime, ako su one poznate u svakoj točki plohe S, onda je u potpunosti određena metrika te plohe, tj. sve one veličine koje je moguće mjeriti na plohi$S$, neovisno o njenom obliku ili položaju u prostoru. Konkretno, takve veličine su:

- duljina luka bilo koje krivulje na plohi S
- kut između bilo kojih dviju krivulja na plohi koje se sijeku u nekoj točki
- površina područja omeđenog nekom zatvorenom krivuljom na plohi.

Kako u ovom radu neće biti riječi striktno o unutarnjoj metrici plohe, već samo o nekim specifičnostima pravčastih ploha, zadržat ćemo se na prvoj fundamentalnoj formi samo toliko da definiramo različite vrste ploha.

Pokazali smo da u prostoru Minkowskog zbog postojanja različitih vrsta vektora postoje različite vrste krivulja. Postoji i više vrsta ploha. To je svojevrstan analogon, budući je nazivlje slično.

Definicija III.7. *Ploha S je:*

- prostorna *ako joj je prva fundamentalna forma pozitivno definitna*
- vremenska *ako joj je prva fundamentalna forma indefinitna*
- izotropna *ako je rang njene prve fundamentalne forme 1*

Podsjetimo se (djelomično) definitnosti kvadratne forme.

Definicija III.8. *Kvadratna forma je*

- pozitivno definitna *ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice strogo pozitivne*
- indefinitna *ako i samo ako postoje barem dvije svojstvene vrijednosti matrice različite od nula i suprotnog predznaka.*

Primjer III.3. *Dvoplošni hiperboloid ima parametrizaciju* $(\cosh u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$. *Odredimo fundamenantalne veličine prvog reda:*

$$
\begin{aligned}
E =& < f_u, f_u >_1 = \\
&= -x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \\
&= -\sinh^2 u + \cosh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v = \\
&= -\sinh^2 u + \cosh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) = \\
&= -\sinh^2 u + \cosh^2 u = \\
&= 1
\end{aligned}
$$

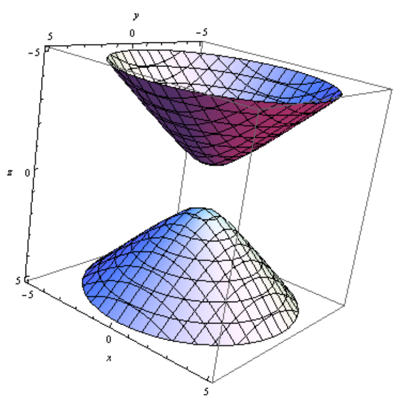
$$
\begin{aligned}
F =& < f_u, f_v >_1 = \\
&= -x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \\
&= -(\sinh u \cdot 0) + (\cosh u \cos v \cdot (-\sinh u \sin v)) + (\cosh u \sin v \cdot \sinh u \cos v) = \\
&= -\sinh u \cosh u \cos v \sin v + \sinh u \cosh u \cos v \sin v = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G =& < f_v, f_v >_1 = \\
&= -x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \\
&= -0 + \sinh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v = \\
&= \sinh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) = \\
&= \sinh^2 u
\end{aligned}
$$

Zapišimo diferencijalnu formu matrično

$$
\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 u \end{pmatrix}
$$

Očito je prva diferencijalna forma pozitivno definitna, stoga zaključujemo da je dana ploha prostorna ploha.



Slika 3.3: Prostorna ploha - dvoplošni hiperboloid

Primjer III.4. *Jednoplošni paraboloid ima parametrizaciju* $(\sinh u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v)$. *Odredimo fundamenantalne veličine prvog reda:*

$$\begin{aligned}
E =&< f_u, f_u >_1= \\
&= -x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \\
&= -\cosh^2 u + \sinh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v = \\
&= -\cosh^2 u + \sinh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) = \\
&= -\cosh^2 u + \sinh^2 u = \\
&= -1
\end{aligned}$$

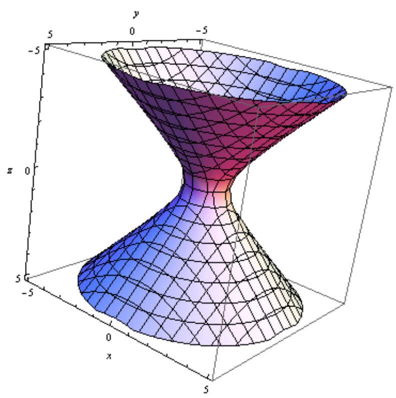
$$\begin{aligned}
F =&< f_u, f_v >_1= \\
&= -x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \\
&= -(\cosh u \cdot 0) + (\sinh u \cos v \cdot (-\cosh u \sin v)) + (\sinh u \sin v \cdot \cosh u \cos v) = \\
&= -\sinh u \cosh u \cos v \sin v + \sinh u \cosh u \cos v \sin v = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G =&< f_v, f_v >_1= \\
&= -x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \\
&= -0 + \cosh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v = \\
&= \cosh^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) = \\
&= \cosh^2 u
\end{aligned}$$

Zapišimo diferencijalnu formu matrično

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}$$

Očito je prva diferencijalna forma indefinitna, stoga zaključujemo da je dana ploha vremenska ploha.



Slika 3.4: Vremenska ploha - jednoplošni hiperboloid

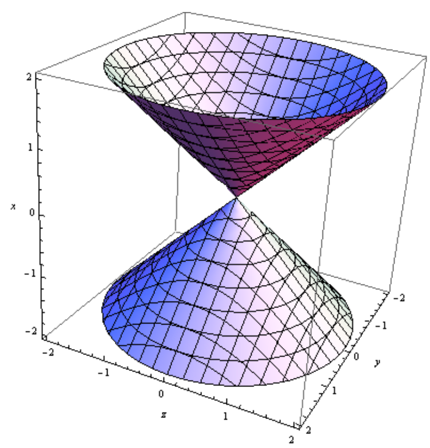
Primjer III.5. *Svjetlosni stožac ima parametrizaciju* $(u, v, \pm\sqrt{u^2+v^2})$. *Odredimo fundamentalne veličine prvog reda:*

$$\begin{aligned}
E &=< f_u, f_u >_1= \\
&= -x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \\
&= -1 + 0 + (\pm\frac{1}{2}(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2u)^2 = \\
&= -1 + \frac{u^2}{u^2-v^2} \\
F &=< f_u, f_v >_1= \\
&= -x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = \\
&= -(1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) + \left(\frac{\pm u}{\sqrt{u^2-v^2}} \cdot \frac{\pm v}{\sqrt{u^2-v^2}}\right) = \\
&= \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}} \\
G &=< f_v, f_v >_1= \\
&= -x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \\
&= -0 + 1 + \left(\pm\frac{1}{2}(u^2-v^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2v)\right)^2 = \\
&= 1 + \frac{v^2}{u^2-v^2}
\end{aligned}$$

Zapišimo diferencijalnu formu matrično

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{u^2-v^2} & \frac{uv}{u^2-v^2} \\ \frac{uv}{u^2-v^2} & 1 + \frac{v^2}{u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

Nakon kraćeg računa je vidljiv rezultat da je rang dane matrice jednak 1, pa zaključujemo da je svjetlosni stožac zbilja izotropna ploha.



Slika 3.5: Izotropna ploha - svjetlosni stožac

Plohu možemo klasificirati i na slijedeći način.

Lema III.1.

1. *Ploha S je* prostorna *ako i samo ako u svakoj točki $P \in S$ postoji vremenski vektor $X \neq 0$ koji je okomit u pseudoskalarnom produktu na tangencijalnu ravninu $T_P S$.*

2. *Ploha S je* vremenska *ako i samo ako u svakoj točki $P \in S$ postoji prostorni vektor $X \neq 0$ koji je okomit u pseudoskalarnom produktu na tangencijalnu ravninu $T_P S$.*

3. *Ploha S je* izotropna *ako i samo ako u svakoj točki $P \in S$ postoji izotropni vektor $X \neq 0$ koji je okomit u pseudoskalarnom produktu na tangencijalnu ravninu $T_P S$.*

Primjetimo da je u iskazu leme spomenut vektor okomit na tangencijalnu ravninu. Kako je tangecijalna ravnina razapeta tangentama krivulje u nekoj točki, onda je spomenuti vektor okomit i na tangente. Radi se, dakle, o *normali* krivulje u nekoj točki.

Znamo da ćemo vektorskim produktom dvaju vektora dobiti vektor koji je okomit na dane vektore. Ukoliko za tangente krivulje u točki P uzmemo vektore f_u i f_v, slijedi da je normala određena sa $f_u(u,v) \times_1 f_v(u,v)$.

U definiranju tangencijalne ravnine nismo zahtjevali da tangente budu normirani vektori. Stoga ni ovako definirana normala neće biti normirani vektor. Međutim, možemo ga definirati na način da bude normiran:

$$\nu = \frac{f_u(u,v) \times_1 f_v(u,v)}{\|f_u(u,v) \times_1 f_v(u,v)\|_1} = \frac{f_u(u,v) \times_1 f_v(u,v)}{\sqrt{|det\mathbf{I}(u,v)|}}.$$

U slijedećem potpoglavlju ćemo je definirati pobliže.

4 Druga fundamentalna forma

Za prostorni ili vremensku plohu u $\mathbb{R}^3_1$ postoji (do na predznak) jedinstvena jedinična normala. Ta jedinstvena jedinična normala može biti upotrijebljena za definiranje Gaussovog preslikavanja.

Definicija III.9.
Gaussovo preslikavanje za prostornu plohu (kojoj je vektor normale vremenski vektor) je oblika

$$\nu : U \to S^2(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Gaussovo preslikavanje vremenske plohe (kojoj je vektor normale prostorni vektor) je oblika

$$\nu : U \to S^2(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Gaussovo preslikavanje je definirano formulom

$$\nu = \frac{f_u \times_1 f_v}{\|f_u \times_1 f_v\|_1}.$$

Lema III.2.
Neka je $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ ploha čije je Gaussovo preslikavanje definirano kao u definiciji III.9. Za svaku $u \in U$ slika ravnine linearnog preslikavanja

$$D\nu|_u : T_u U \to T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3_1$$

je paralelna sa tangecijalnom ravninom $T_u f$. Stoga možemo identificirati $T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3_1 \cong \mathbb{R}^3_1 \cong T_{f(u)}\mathbb{R}^3_1$ i možemo zapisati da je u svakoj točki dobro definirano prelikavanje

$$D\nu|_u : T_u U \to T_u f.$$

Nadalje, restrikcijom na sliku, preslikavanje $Df|_u$ je linearni izomorfizam

$$Df|_u : T_u U \to T_u f.$$

U tom je slučaju i inverzno preslikavanje $(Df|_u)^{-1}$ također izomorfizam.

Definicija III.10.
Preslikavanje $L := -D\nu \circ (Df)^{-1}$ zove se Weingartenovo preslikavanje *ili* operator oblika plohe.

Napomena: Zbog jednostavnosti prikaza ćemo u slijedećem dijelu pisati u_1 za parametar u, a u_2 za parametar v.

Prisjetimo se da je prva fundamentalna forma definirana na slijedeći način:

$$\mathbf{I} = g_{ij} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right\rangle_1 .$$

U Euklidskom prostoru drugu fundamentalnu formu definiramo kao $\mathbf{II}(X, Y) = \mathbf{I}(LX, Y)$ i jednostavno promotrimo matricu koja se sastoji od drugih derivacija. Jednostavnost (nasuprot definiranju druge fundamentalne forme u prostoru Minkowskog) je u tome što u Euklidskom prostoru postoji samo jedna vrsta vektora. U prostoru Minkowskog postoje tri vrste vektora, pa moramo posebno obratiti pozornost na vrstu jediničnog vektora normale ν.

Definicija III.11. *Neka je* $f : U \to \mathbf{R}$ *ploha čije je Gaussovo preslikavanje* $\nu : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3_1$. *Za tangencijalne vektore* X, Y *definiramo* drugu diferencijalnu formu **II** *plohe* f *sa*

$$< \mathbf{II}(X,Y), \nu >_1 = < LX, Y >_1,$$

odnosno

$$\mathbf{II}(X,Y) = < LX, Y >_1 < \nu, \nu >_1 \nu.$$

Važno je primjetiti da je navedena defincija općenitiji slučaj definicije druge fundamentalne forme u Euklidskom prostoru, pa s toga vrijedi i u Euklidskom prostoru.

Zapisano koordinatno:

$$\mathbf{II}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = h_{ij}\nu = \epsilon \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle_1 \nu,$$

gdje je $\epsilon = < \nu, \nu >_1 \in \{-1, 1\}$.

Definirajmo Gaussove osnovne veličine drugog reda.

Definicija III.12. *Neka je ploha* M *zadana parametarski sa* $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. *Tada za plohu* M *definiramo funkcije* $L, M, N : U \to \mathbb{R}$ *na slijedeći način:*

$$\begin{aligned} L &:= \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{11} \\ M &:= \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{12} = \epsilon \cdot h_{21} \\ N &:= \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{22} \end{aligned}$$

Veličine L, M, N *definirane na navedeni način nazivamo* Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda *ili* koeficijentima druge fundamentalne forme.

Prema tome, drugu fundamentalnu formu možemo prikazati na slijedeći način:

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

5 Gaussova i srednja zakrivljenost

Podsjetimo se: kroz bilo koju točku P plohe S prolazi beskonačno mnogo krivulja. Sve te krivulje u toj točki imaju definiranu fleksiju. Kada nam je poznata fleksija krivulje, poznat nam je i polumjer zakrivljenosti te krivulje. Promatramo samo dva polumjera zakrivljenosti, minimalni i maksimalni. U Euklidskom prostoru se Gaussova zakrivljenost računa kao umnožak tih dvaju polumjera zakrivljenosti, a srednja se zakrivljenost plohe računa kao aritmetička sredina tih polumjera zakrivljenosti. Na sličan ćemo način definirati zakrivljenosti plohe u prostoru Minkowskog, ali moramo posebnu pozornost obratiti na predznak!

Definicija III.13. *Gaussova zakrivljenost plohe u prostoru Minkowskog definirana je relacijom*

$$K = \frac{< \mathbf{II}(X,X), \mathbf{II}(Y,Y) >_1 - < \mathbf{II}(X,Y), \mathbf{II}(Y,X) >_1}{\mathbf{I}(X,X) \cdot \mathbf{I}(Y,Y) - \mathbf{I}(X,Y) \cdot \mathbf{I}(Y,X)} = \frac{det(h_{ij})}{det(g_{ij})} \cdot \epsilon = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \cdot \epsilon,$$

gdje je $\epsilon =< \nu, \nu >_1$, *a* X, Y *proizvoljni vektori iz tangencijalne ravnine.*

Definicija III.14. *Srednja zakrivljenost plohe u prostoru Minkowskog definirana je relacijom*

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \cdot \epsilon,$$

gdje je $\epsilon =< \nu, \nu >_1$.

Klasifikacija ploha u prostoru Minkowskog s obzirom na Gaussovu i srednju zakrivljenost je analogna klasifikaciji u Euklidskom prostoru. Ograničit ćemo se (za sada) samo na definiranje minimalne plohe, što će nam biti od posebne važnosti u poglavlju IV.

Definicija III.15. *Ploha* $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ *je minimalna ako je njena srednja zakrivljenost jednaka nuli, odnosno ako vrijedi* $H = 0$.

Poglavlje IV

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog

1 Definicija pravčastih ploha

Pravčasta se plohe u prostoru Minkowskog definira kao i u Euklidskom prostoru budući je pravac u prostoru $\mathbb{R}^3$ pravac i u prostoru $\mathbb{R}^3_1$. Stoga vrijedi:

Definicija IV.1. *Ploha $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ se naziva* pravčastom plohom *ako se može zapisati slijedećom parametrizacijom*

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u),$$

gdje je c diferencijabilna (ali ne nužno regularna) krivulja i X vektorsko polje duž krivulje c koje nigdje ne iščezava.

Očito je v Euklidski pravac u prostoru. Intuitivno zaključujemo da je ploha rezultat gibanja pravca u prostoru, slično kao što krivulju možemo zamisliti kao trag koji ostavlja točka kada se giba u prostoru. Pravci na polju X se nazivaju *generatrise* ili *izvodnice* pravčaste plohe, a krivulja c se naziva *direktrisa* pravčaste plohe. Možemo reći i ovako: ploha je pravčasta ako i samo ako u svakoj točki te plohe postoji pravac takav da leži na plohi.

Pogledajmo na koji način možemo reparametrizirati pravčastu plohu.

Lema IV.1. *Neka je $f(s, t) = c(t) + s \cdot X(t)$ pravčasta ploha za koju vrijedi $\frac{dX}{dt} \neq 0$ u intervalu $t_1 < t < t_2$. Tada se ploha f može reparametrizirati na jedinstveni način:*

$$f_*(u, v) = c_*(u) + v \cdot X_*(u),$$

tako da vrijedi: $X_* = \frac{X}{\|X\|_1}$, $\|X_*\|_1 = 1$ i $< c'_*, X'_* >_1 = 0$.

Kako je najavljeno u prethodnom poglavlju, provest ćemo dodatnu klasifikaciju pravčastih ploha.

Definicija IV.2.

- *Pravčasta ploha kojoj je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli ($K = 0$) naziva se* razvojna ploha*.*
- *Pravčasta ploha kojoj je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki različita od nule ($K \neq 0$) naziva se* vitopera ploha*.*

Geometrijska interpretacija ove definicije je slijedeća: razvojna ploha je ona ploha koja se dade razviti u ravninu; vitopera je ploha ona ploha koja se ne može razviti u ravninu (njena dva neizmjerno bliska pravca su mimosmjerna).

Ovom diobom smo pravčaste plohe "razbili" u dvije klase pravčastih ploha. Razvojne plohe dalje možemo podijeliti na cilindrične, konusne, tangentne, normalne i binormalne plohe.

Cilindrične plohe su plohe parametrizacije $f(u, v) = c(u) + vX$, gdje je c regularna krivulja, a X konstantno jedinično polje duž krivulje c.

Konusne plohe su plohe parametrizacije $f(u, v) = p + vX(u)$, gdje je p fiksna točka (krivulja c je degenerirala u točku. Konusne plohe nisu regularne u vrhu.

Tangentne plohe su plohe parametrizacije $f(u, v) = c(u) + vc'(u)$, gdje je c regularna krivulja (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je parametrizirana duljinom lûka), a c' njezino tangencijalno polje. Tangente plohe nisu regularne duž krivulje c. Ona se naziva *grebenom* tih ploha. Ovdje je zanimljivo primjetiti da je tangentna ploha ustvari ploha koja sadrži sve tangente krivulje c.

Na sličan način kao tangentne plohe možemo definirati normalnu i binormalnu plohu. One, naime, su razapete svim vektorima normale, odnosno binormale, duž krivulje c.

U slijedećem ćemo potpoglavlju navesti primjere pravčastih ploha te izračunati Gaussovu i srednju zakrivljenost za svaki primjer. Posebna će se pozornost, kako je najavljeno u Uvodu ovog rada, posvetiti minimalnim pravčastim plohama.

2 Primjeri pravčastih ploha

2.1 Jednoplošni hiperboloid

Parametrizacija jednoplošnog hiperboloida je $f(u,v) = (v, \cos u - v\sin u, v\cos u + \sin u)$. Primjetimo da smo to mogli zapisati i na sljedeći način: $f(u,v) = (0, \cos u, \sin u) + v \cdot (1, -\sin u, \cos u)$, čime smo pokazali da je to zbilja pravčasta ploha.

$$\begin{aligned}
f_u &= (0, -\sin u - v\cos u, -v\sin u + \cos u) \\
f_v &= (1, -\sin u, \cos u) \\
f_{uu} &= (0, -\cos u + v\sin u, -v\cos u - \sin u) \\
f_{uv} &= (0, -\cos u, -\sin u) \\
f_{vv} &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &=< f_u, f_u >_1= \\
&= 0 + \sin^2 u + 2v\sin u\cos u + v^2\cos^2 u + \cos^2 u - 2v\sin u\cos u + v^2\sin^2 u = \\
&= (\sin^2 u + \cos^2 u) + v^2(\sin^2 u + \cos^2 u) + 2v\sin u\cos u - 2v\sin u\cos u = \\
&= 1 + v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &=< f_u, f_v >_1= \\
&= 0 + \sin u(\sin u + v\cos u) + \cos u(\cos u - v\sin u) = \\
&= \sin^2 u + v\sin u\cos u + \cos^2 u - v\sin u\cos u = \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &=< f_v, f_v >_1= \\
&= -1 + \sin^2 u + \cos^2 u = \\
&= -1 + 1 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Programom *Wolfram Mathematica (verzija 7.0)* nalazimo da navedena matrica ima dvije svojstvene vrijednosti od kojih je jedna pozitivna, a druga negativna, pa zaključujemo da je dana ploha vremenska ploha. Isti rezultat smo dobili u prethodnom poglavlju, ali koristeći drugačiju parametrizaciju ove plohe!

Kako je jednoplošni hiperboloid vremenska ploha slijedi da je $\epsilon =< \nu, \nu >_1= 1$.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν!

$$\begin{aligned} f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ 0 & -\sin u - v\cos u & -v\sin u + \cos u \\ 1 & -\sin u & \cos u \end{vmatrix} = \\ &= (v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{|<f_v \times_1 f_u, f_v \times_1 f_u>_1|} = \\ &= \sqrt{|<v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u>_1|} = \\ &= \sqrt{|-v^2 + \cos^2 u - 2v\sin u\cos u + v^2\sin^2 u + \sin^2 u + 2v\sin u\cos u + v^2\cos^2 u|} = \\ &= \sqrt{|-v^2 + 1 + v^2|} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primjetimo da je vektor normale već normiran!

$$\begin{aligned} L &= <f_{uu}, \nu>_1 = \\ &= <(0, -\cos u + v\sin u, -v\cos u - \sin u), (v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u)>_1 = \\ &= -1 - v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= <f_{uv}, \nu>_1 = \\ &= <(0, -\cos u, -\sin u), (v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u)>_1 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

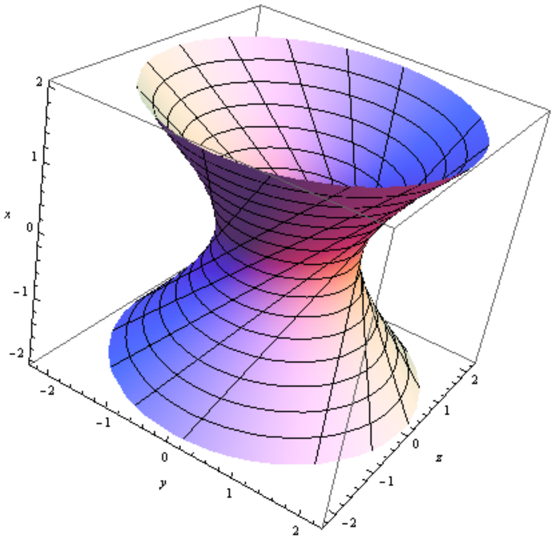
$$\begin{aligned} N &= <f_{vv}, \nu>_1 = \\ &= <(0, 0, 0), (v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u)>_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 1$$

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = 1$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je jednoplošni hiperboloid vitopera ploha.



Slika 4.1: Pravčasta ploha - jednoplošni hiperboloid

Na slici se lijepo može vidjeti da je jednoplošni hiperboloid pravčasta ploha.

Štoviše, jednoplošni hiperboloid spada u grupu dvostruko pravčastih ploha (u koju još spadaju samo hipar i ravnina), što znači da na njemu "žive" dvije familije pravaca.

2.2 Cilindar

Parametrizacija cilindra je $f(u,v) = (v, \sin u, \cos u)$. Primjetimo da smo to mogli zapisati i na sljedeći način: $f(u,v) = (0, \sin u, \cos u) + v \cdot (1,0,0)$, čime smo pokazali da je to zbilja pravčasta ploha, i to cilindrična ploha (vektorsko je polje konstantno).

$$\begin{aligned} f_u &= (0, \cos u, -\sin u) \\ f_v &= (1,0,0) \\ f_{uu} &= (0, -\sin u, -\cos u) \\ f_{uv} &= (0,0,0) \\ f_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &=< f_u, f_u >_1= \\ &= -0 \cdot 0 + \cos u \cdot \cos u + (-\sin u) \cdot (-\sin u) = \\ &= \cos^2 u + \sin^2 u = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &=< f_u, f_v >_1= \\ &= -0 \cdot 1 + 0 \cdot \cos u + 0 \cdot (-\sin u) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &=< f_v, f_v >_1= \\ &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Očito je da navedena matrica ima dvije svojstvene vrijednosti od kojih je jedna pozitivna, a druga negativna, pa zaključujemo da je dana ploha vremenska ploha.

Kako je cilindar vremenska ploha slijedi da je $\epsilon =< \nu, \nu >_1= 1$.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν!

$$\begin{aligned} f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ 0 & \cos u & -\sin u \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0, -\sin u, -\cos u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{| < f_u \times_1 f_v, f_u \times_1 f_v >_1 |} = \\ &= \sqrt{| < (0, -\sin u, -\cos u), (0, -\sin u, -\cos u) >_1 |} = \\ &= \sqrt{|\sin^2 u + \cos^2 u|} = \\ &= \sqrt{1} = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Primjetimo da je vektor normale već normiran!

$$\begin{aligned} L &=< f_{uu}, \nu >_1 = \\ &=< (0, -\sin u, -\cos u), (0, -\sin u, -\cos u) >_1 = \\ &= \sin^2 u + \cos^2 u = \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &=< f_{uv}, \nu >_1 = \\ &=< (0, 0, 0), (0, -\sin u, -\cos u) >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

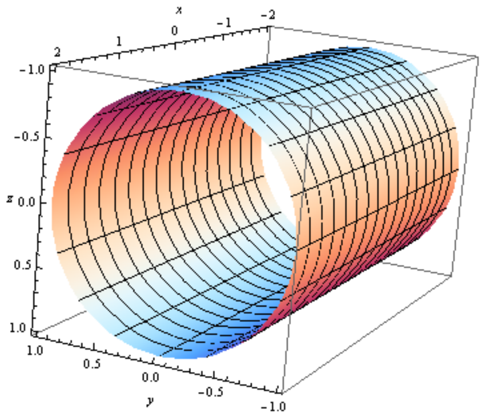
$$\begin{aligned} N &=< f_{vv}, \nu >_1 = \\ &=< (0, 0, 0), (0, -\sin u, -\cos u) >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$$

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je cilindar razvojna ploha.



Slika 4.2: Pravčasta ploha - cilindar

Na slici se lijepo može vidjeti da je cilindar pravčasta ploha.

2.3 Hiperbolički paraboloid (hipar)

Parametrizacija hipara je $f(u,v) = (u, v, uv)$. Primjetimo da smo to mogli zapisati i na sljedeći način: $f(u,v) = (u,0,0) + v\cdot(0,1,u)$, čime smo pokazali da je to zbilja pravčasta ploha.

$$\begin{aligned} f_u &= (1,0,v)\\ f_v &= (0,1,u)\\ f_{uu} &= (0,0,0)\\ f_{uv} &= (0,0,1)\\ f_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &=< f_u, f_u >_1=\\ &= -1\cdot 1 + 0\cdot 0 + v\cdot v =\\ &= -1 + v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &=< f_u, f_v >_1=\\ &= -1\cdot 0 + 0\cdot 1 + v\cdot u =\\ &= uv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &=< f_v, f_v >_1=\\ &= -0\cdot 0 + 1\cdot 1 + u\cdot u =\\ &= 1 + u^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

Programom *Wolfram Mathematica (verzija 7.0)* nalazimo da navedena matrica ima dvije svojstvene vrijednosti od kojih su obje funkcije od u i v, ali su bez obzira na to pozitivne na cijeloj domeni. Stoga zaključujemo da je hipar prostorna ploha.

Kako je hipar prostorna ploha slijedi da je $\epsilon =< \nu, \nu >_1= -1$.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν!

$$\begin{aligned} f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \\ &= (v, -u, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{| < f_u \times_1 f_v, f_u \times_1 f_v >_1 |} = \\ &= \sqrt{| < (v, -u, 1), (v, -u, 1) >_1 |} = \\ &= \sqrt{| - v^2 + u^2 + 1|} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\nu = \left(\frac{v}{\sqrt{| - v^2 + u^2 + 1|}}, \frac{-u}{\sqrt{| - v^2 + u^2 + 1|}}, \frac{1}{\sqrt{| - v^2 + u^2 + 1|}} \right).$$

$$\begin{aligned} L &= \epsilon < f_{uu}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon < (0, 0, 0), \nu >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \epsilon < f_{uv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon < (0, 0, 1), \nu) >_1 = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{| - v^2 + u^2 + 1|}} \end{aligned}$$

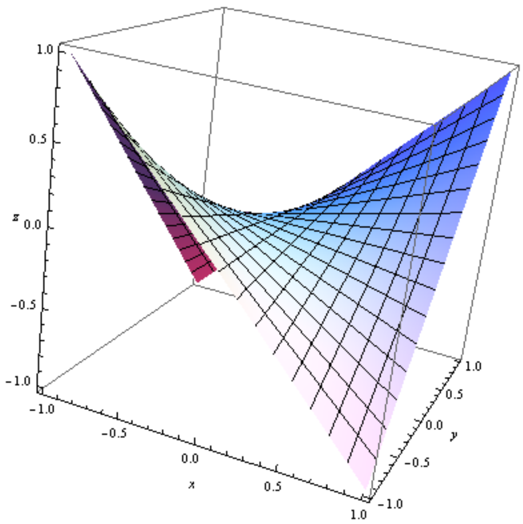
$$\begin{aligned} N &= \epsilon < f_{vv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon < (0, 0, 0), \nu >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$K = -\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(v^2 - u^2 - 1)\sqrt{|u^2 - v^2 + 1|}} = \frac{1}{(-v^2 + u^2 + 1)\sqrt{|u^2 - v^2 + 1|}}$$

$$H = -\frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = -\frac{2uv}{(v^2 - u^2 - 1)\sqrt{|u^2 - v^2 + 1|}}$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je hipar ploha koja nema konstantnu ni Gaussovu ni srednju zakrivljenost. Štoviše, nijedna od njih nije pozitivna ili negativna na cijeloj plohi, već su na dijelovima negativne, na dijelovima pozitivne, a na dijelovima jednake nuli.



Slika 4.3: Pravčasta ploha - hipar

Na slici se lijepo može vidjeti da je hipar pravčasta ploha.

Štoviše, hipar spada u grupu dvostruko pravčastih ploha (u koju još spadaju samo jednoplošni hiperboloid i ravnina), što znači da na njemu "žive" dvije familije pravaca.

2.4 Minimalne plohe

U Uvodu ovog rada je najavljen značajan rezultat pravčastih ploha u prostoru Minkowskog. Podsjetimo se, u Euklidskom prostoru postoje samo dvije minimalne pravčaste plohe, ravnina i helikoid. U prostoru Minkowskog postoje čak četiri minimalne pravčaste plohe. Sve te četiri plohe su helikoidalne pravčaste plohe, što znači da nastaju helikoidalnim gibanjem pravca u prostoru. U nastavku ćemo dati rezultate za te plohe.

Minimalna ploha 1

Zadan je ploha parametrizacije $f(u,v) = (au, v\cos u, v\sin u), a \neq 0$ proizvoljan. Tu plohu možemo zapisati u obliku $f(u,v) = (au,0,0) + v(0,\cos u,\sin u)$ čime smo pokazali da je to pravčasta ploha.

$$\begin{aligned}
f_u &= (a, -v\sin u, v\cos u)\\
f_v &= (0, \cos u, \sin u)\\
f_{uu} &= (0, -v\cos u, -v\sin u)\\
f_{uv} &= (0, -\sin u, \cos u)\\
f_{vv} &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &=< f_u, f_u >_1=\\
&= -a\cdot a + (-v\sin u)^2 + (v\cos u)^2 =\\
&= -a^2 + v^2\sin^2 u + v^2\cos^2 u =\\
&= -a^2 + v^2(\sin^2 u + cos^2 u) =\\
&= -a^2 + v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &=< f_u, f_v >_1=\\
&= -a\cdot 0 + \cos u\cdot(-v\sin u) + \sin u\cdot(v\cos u) =\\
&= -v\sin u\cos u + v\sin u\cos u =\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &=< f_v, f_v >_1=\\
&= -0\cdot 0 + \cos^2 u + \sin^2 u =\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -a^2+v^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Primjećujemo da svojstvene vrijednosti matrice prve fundamentalne forme ovisi o parametru v, pa će u ovisnosti o tom parametru ploha biti prostorna (za $|v| > a$) ili vremenska (za $|v| < a$).

O tome nam naravno ovisi i ϵ. Stoga ćemo sada izvesti daljnji račun, a potom diskutirati ovisnost rješenja o tipu plohe.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν.

$$\begin{aligned} f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ a & -v\sin u & v\cos u \\ 0 & \cos u & \sin u \end{vmatrix} = \\ &= (v, -a\sin u, a\cos u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{|< f_v \times_1 f_u, f_v \times_1 f_u >_1|} = \\ &= \sqrt{|< (v, -a\sin u, a\cos u), (v, -a\sin u, a\cos u) >_1|} = \\ &= \sqrt{|-v^2 + a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u|} = \\ &= \sqrt{|-v^2 + a^2|} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\nu = \left(\frac{v}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{-a\sin u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \right).$$

$$\begin{aligned} L &= \epsilon < f_{uu}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon \left\langle (0, -v\cos u, -v\sin u), \left(\frac{v}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{-a\sin u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \right) \right\rangle_1 = \\ &= \epsilon \frac{0 \cdot v - v\cos u \cdot (-a\sin u) - v\sin u \cdot a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \epsilon < f_{uv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon \left\langle (0, -\sin u, \cos u), \left(\frac{v}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{-a\sin u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \right) \right\rangle_1 = \\ &= \epsilon \frac{0 \cdot v - \sin u \cdot (-a\sin u) + \cos u \cdot a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \\ &= \epsilon \frac{a}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \epsilon < f_{vv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon < (0,0,0), \nu >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$\begin{aligned}
K &= \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\
&= \epsilon \frac{0 \cdot 0 - \frac{a^2}{|-v^2+a^2|}}{-a^2 + v^2} = \\
&= -\epsilon \frac{a^2}{(-a^2 + v^2) \cdot | - v^2 + a^2|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \epsilon \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \\
&= \epsilon \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \epsilon \frac{a}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} + (-a^2 + v^2) \cdot 0}{2(-a^2 + v^2)} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Kako smo dobili da ova ploha u svakoj točki ima minimalnu zakrivljenost $H = 0$, zaključujemo da je minimalna ploha! Štoviše, to vrijedi za svaki $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

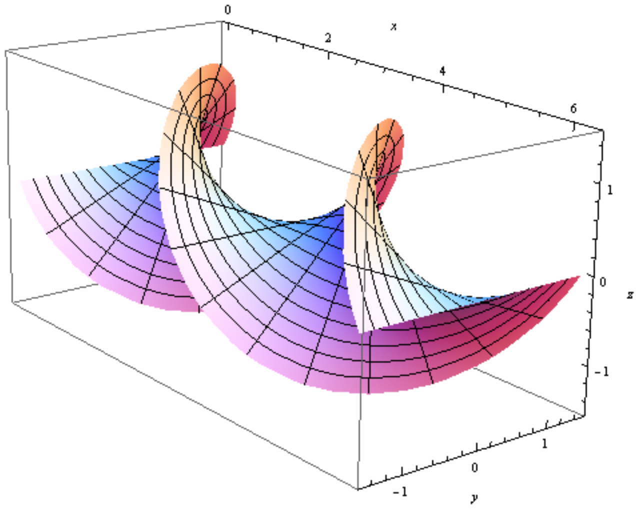
Ostaje nam još diskutirati Gaussovu zakrivljenost plohe.

Već smo naveli da u slučaju kada je $|v| > a$, ploha je prostorna. U tom slučaju znamo da je $\epsilon = -1$. Jasno je da je apsolutna vrijednost nekog broja pozitivan broj. Broj $-a^2 + v^2$ će u slučaju $|v| > a$ biti pozitivan broj. Iz toga nam slijedi da je za $|v| > a$ Gaussova zakrivljenost veća od nule.

Analogno provedemo postupak za slučaj $|v| < a$ te kao rezultat dobijemo slijedeće:

$$K = \begin{cases} > 0, & |v| > a \\ < 0, & |v| < a \end{cases}$$

Primjetimo kako je Gaussova zakrivljenost ove plohe $K \neq 0$ iz čega još zaključujemo da je riječ o vitoperoj plohi.



Slika 4.4: Minimalna pravčasta ploha 1

Na slici se lijepo mogu vidjeti pravci na ovoj minimalnoj plohi.

Minimalna ploha 2

Zadan je ploha parametrizacije $f(u,v) = (v\sinh u, v\cosh u, au), a \neq 0$ proizvoljan. Tu plohu možemo zapisati u obliku $f(u,v) = (au,0,0)+v(\sinh u, \cosh u, 0)$ čime smo pokazali da je to pravčasta ploha.

$$\begin{aligned}
f_u &= (v\cosh u, v\sinh u, a)\\
f_v &= (\sinh u, \cosh u, 0)\\
f_{uu} &= (v\sinh u, v\cosh u, 0)\\
f_{uv} &= (\cosh u, \sinh u, 0)\\
f_{vv} &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &=< f_u, f_u >_1=\\
&= -v^2\cosh^2 u + v^2\sinh^2 u + a^2 =\\
&= -v^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) + a^2 =\\
&= -v^2 + a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &=< f_u, f_v >_1=\\
&= -v\cosh u\sinh u + v\sinh u\cosh u =\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &=< f_v, f_v >_1=\\
&= -\sinh^2 u + \cosh^2 u =\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 - v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primjećujemo da svojstvene vrijednosti matrice prve fundamentalne forme ovisi o parametru v, pa će u ovisnosti o tom parametru ploha biti prostorna (za $|v| < a$) ili vremenska (za $|v| > a$).

O tome nam naravno ovisi i ϵ. Stoga ćemo sada izvesti daljnji račun, a potom diskutirati ovisnost rješenja o tipu plohe.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν.

$$\begin{aligned} f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ v\cosh u & v\sinh u & a \\ \sinh u & \cosh u & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (a\cosh u, a\sinh u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{|< f_v \times_1 f_u, f_v \times_1 f_u >_1|} = \\ &= \sqrt{|< (a\cosh u, a\sinh u, v), (a\cosh u, a\sinh u, v) >_1|} = \\ &= \sqrt{|-a^2\cosh^2 u + a^2\sinh^2 u + v^2|} = \\ &= \sqrt{|-a^2(\cosh^2 u - \sinh^2 u) + v^2|} = \\ &= \sqrt{|-a^2 + v^2|} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\nu = \left(\frac{a\cosh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{a\sinh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \right).$$

$$\begin{aligned} L &= \epsilon < f_{uu}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon \left\langle (v\sinh u, v\cosh u, 0), \left(\frac{a\cosh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{a\sinh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \right) \right\rangle_1 = \\ &= \epsilon \frac{-v\sinh u \cdot a\cosh u + v\cosh u \cdot a\sinh u + 0 \cdot v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \epsilon < f_{uv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon \left\langle (\cosh u, \sinh u, 0), \left(\frac{a\cosh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{a\sinh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \right) \right\rangle_1 = \\ &= \epsilon \frac{\cosh u \cdot a\cosh u + \sinh u \cdot a\sinh u + 0 \cdot v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \\ &= \epsilon \frac{-a}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \epsilon < f_{vv}, \nu >_1 = \\ &= \epsilon < (0,0,0), \nu >_1 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$\begin{aligned}
K &= \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\
&= \epsilon \frac{0 \cdot 0 - \frac{a^2}{|-a^2+v^2|}}{-v^2 + a^2} = \\
&= -\epsilon \frac{a^2}{(-v^2 + a^2) \cdot |-a^2 + v^2|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \epsilon \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \\
&= \epsilon \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \left(\epsilon \frac{-a^2}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}\right) + (-v^2 + a^2) \cdot 0}{2 \cdot (-v^2 + a^2)} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Kako smo dobili da ova ploha u svakoj točki ima minimalnu zakrivljenost $H = 0$, zaključujemo da je minimalna ploha! Štoviše, to vrijedi za svaki $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

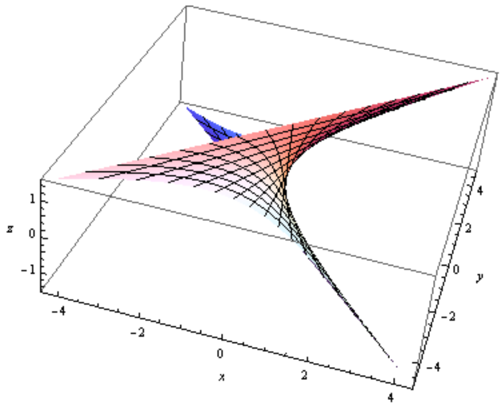
Ostaje nam još diskutirati Gaussovu zakrivljenost plohe.

Već smo naveli da u slučaju kada je $|v| < a$, ploha je prostorna. U tom slučaju znamo da je $\epsilon = -1$. Jasno je da je apsolutna vrijednost nekog broja pozitivan broj. Broj $-v^2 + a^2$ će nam u slučaju $|v| < a$ biti pozitivan broj. Iz toga nam slijedi da je za $|v| < a$ Gaussova zakrivljenost veća od nule.

Analogno provedemo postupak za slučaj $|v| > a$ te kao rezultat dobijemo slijedeće:

$$K = \begin{cases} > 0, & |v| < a \\ < 0, & |v| > a \end{cases}$$

Primjetimo kako je Gaussova zakrivljenost ove plohe $K \neq 0$ iz čega još zaključujemo da je riječ o vitoperoj plohi.



Slika 4.5: Minimalna pravčasta ploha 2

Na slici se lijepo mogu vidjeti pravci na ovoj minimalnoj plohi.

Minimalna ploha 3

Zadan je ploha parametrizacije $f(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, au), a \neq 0$ proizvoljan. Tu plohu možemo zapisati u obliku $f(u,v) = (0,0,au)+v(\cosh u, \sinh u, 0)$ čime smo pokazali da je to pravčasta ploha.

$$\begin{aligned} f_u &= (v\sinh u, v\cosh u, a) \\ f_v &= (\cosh u, \sinh u, 0) \\ f_{uu} &= (v\cosh u, v\sinh u, 0) \\ f_{uv} &= (\sinh u, \cosh u, 0) \\ f_{vv} &= (0,0,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E =&< f_u, f_u >_1= \\ &= -v^2\sinh^2 u + v^2\cosh^2 u + a^2 = \\ &= v^2(-\sinh^2 u + \cosh^2 u) + a^2 = \\ &= v^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F =&< f_u, f_v >_1= \\ &= -v\cosh u \sinh u + v\sinh u \cosh u = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G =&< f_v, f_v >_1= \\ &= -\cosh^2 u + \sinh^2 u = \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2+v^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Primjećujemo da je za svaki $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ova forma uvijek indefinitna, odnosno ploha je vremenska.

Kako je ploha vremenska, slijedi da je $\epsilon = 1$.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν.

$$\begin{aligned}
f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ v\sinh u & v\cosh u & a \\ \cosh u & \sinh u & 0 \end{vmatrix} = \\
&= (a\sinh u, a\cosh u, -v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{|< f_v \times_1 f_u, f_v \times_1 f_u >_1|} = \\
&= \sqrt{|< (a\sinh u, a\cosh u, -v), (a\sinh u, a\cosh u, -v) >_1|} = \\
&= \sqrt{|-a^2\sinh^2 u + a^2\cosh^2 u + v^2|} = \\
&= \sqrt{|a^2(-\sinh^2 u + \cosh^2 u) + v^2|} = \\
&= \sqrt{a^2 + v^2}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\nu = \left(\frac{a\sinh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{a\cosh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{a^2+v^2}} \right).$$

$$\begin{aligned}
L &= \epsilon < f_{uu}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon \left\langle (v\cosh u, v\sinh u, 0), \left(\frac{a\sinh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{a\cosh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{a^2+v^2}} \right) \right\rangle_1 = \\
&= \frac{-av\sinh u\cosh u + va\cosh u\sinh u + 0\cdot(-v)}{\sqrt{a^2+v^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= \epsilon < f_{uv}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon \left\langle (\sinh u, \cosh u, 0), \left(\frac{a\sinh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{a\cosh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{a^2+v^2}} \right) \right\rangle_1 = \\
&= \frac{-\sinh u\cdot a\sinh u + \cosh u\cdot a\cosh u + 0\cdot(-v)}{\sqrt{a^2+v^2}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \epsilon < f_{vv}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon < (0,0,0), \nu >_1 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

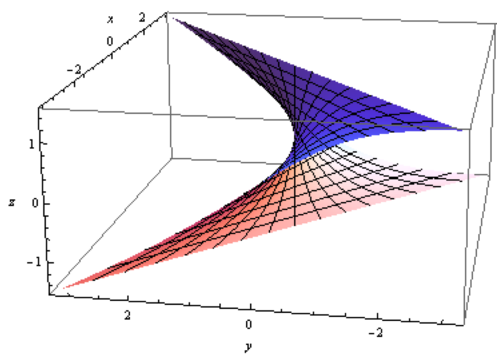
Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\ &= \frac{0 \cdot 0 - \frac{a^2}{a^2+v^2}}{-v^2 - a^2} = \\ &= \frac{a^2}{(v^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \\ &= \frac{-1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}} + (v^2 + a^2) \cdot 0}{2(-v^2 - a^2)} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Kako smo dobili da ova ploha u svakoj točki ima minimalnu zakrivljenost $H = 0$, zaključujemo da je minimalna ploha! Štoviše, to vrijedi za svaki proizvoljni $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Primjetimo kako je Gaussova zakrivljenost ove plohe $K > 0$, za svaki proizvoljni $a \neq 0$ iz čega zaključujemo da je riječ o vitoperoj plohi.



Slika 4.6: Minimalna pravčasta ploha 3

Na slici se lijepo mogu vidjeti pravci na ovoj minimalnoj plohi.

Minimalna ploha 4

Zadan je ploha parametrizacije $f(u,v) = \left(a\left(\frac{u^3}{3}+u\right)+uv, a\left(\frac{u^3}{3}+u\right)-uv, au^2+v\right)$, $a \neq 0$ proizvoljan. Tu plohu možemo zapisati u obliku $f(u,v) = \left(a\left(\frac{u^3}{3}+u\right), a\left(\frac{u^3}{3}-u\right), au^2\right)+ v(u,u,1)$ čime smo pokazali da je to pravčasta ploha.

$$\begin{aligned}
f_u &= (au^2+a+v, au^2-a+v, 2au)\\
f_v &= (u,u,1)\\
f_{uu} &= (2au, 2au, 2a)\\
f_{uv} &= (1,1,0)\\
f_{vv} &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &=< f_u, f_u >_1=\\
&= -(au^2+a+v)^2 + (au^2-a+v)^2 + (2au)^2 =\\
&= -a^2u^4 - a^2 - v^2 - 2a^2u^2 - 2au^2v - 2av + a^2u^4 + a^2 + v^2 - 2a^2u^2 + 2au^2v - 2av + 4a^2u^2 =\\
&= -4av
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &=< f_u, f_v >_1=\\
&= -au^3 - au - uv + au^3 - au + uv + 2au =\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &=< f_v, f_v >_1=\\
&= -u^2 + u^2 + 1 =\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4av & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primjećujemo da svojstvene vrijednosti matrice prve fundamentalne forme ovisi o parametru v i proizvoljnom a, pa će u ovisnosti o tom parametru ploha biti prostorna (za $av < 0$) ili vremenska (za $av > 0$).

O tome nam naravno ovisi i ϵ. Stoga ćemo sada izvesti daljnji račun, a potom diskutirati ovisnost rješenja o tipu plohe.

Prije računanja fundamentalnih veličina drugog reda, moramo izračunati ν.

$$
\begin{aligned}
f_u \times_1 f_v &= \begin{vmatrix} -i & j & k \\ au^2+a+v & au^2-a+v & 2au \\ u & u & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (a+au^2-v, -a+au^2-v, 2au)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|f_u \times_1 f_v\|_1 &= \sqrt{|< f_v \times_1 f_u, f_v \times_1 f_u >_1|} = \\
&= \sqrt{|< (a+au^2-v, -a+au^2-v, 2au), (a+au^2-v, -a+au^2-v, 2au) >_1|} = \\
&= \sqrt{|-(a+au^2-v)^2 + (-a+au^2-v)^2 + (2au)^2|} = \\
&= \sqrt{|4av|} = \\
&= 2\sqrt{|av|}
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\nu = \left(\frac{a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{-a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{2au}{2\sqrt{|av|}} \right).
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \epsilon < f_{uu}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon \left\langle (2au, 2au, 2a), \left(\frac{a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{-a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{2au}{2\sqrt{|av|}} \right) \right\rangle_1 = \\
&= \epsilon \frac{-2a^2u - 2a^2u^3 + 2auv - 2a^2u + 2a^2u^3 - 2auv + 4a^2u}{2\sqrt{|av|}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M &= \epsilon < f_{uv}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon \left\langle (1,1,0), \left(\frac{a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{-a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{2au}{2\sqrt{|av|}} \right) \right\rangle_1 = \\
&= \epsilon \frac{-a - au^2 + v - a + au^2 - v}{2\sqrt{|av|}} \\
&= \epsilon \frac{-a}{\sqrt{|av|}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N &= \epsilon < f_{vv}, \nu >_1 = \\
&= \epsilon < (0,0,0), \nu >_1 = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Izračunajmo Gaussovu i srednju zakrivljenost!

$$\begin{aligned} K &= \epsilon \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \\ &= \epsilon \frac{0 \cdot 0 - \frac{a^2}{|av|}}{-4av} = \\ &= \epsilon \frac{-a^2}{4av|av|} \end{aligned}$$

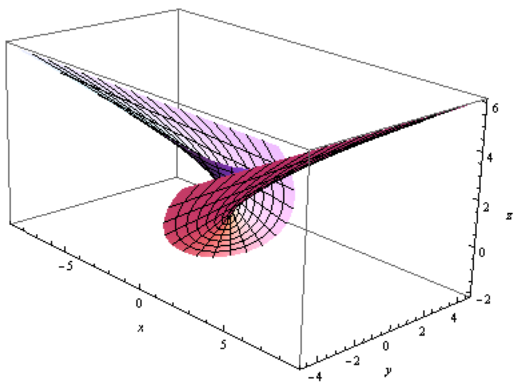
$$\begin{aligned} H &= \epsilon \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} = \\ &= \epsilon \frac{1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot \epsilon \frac{-a}{\sqrt{|av|}} + (-4av) \cdot 0}{-8av} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Kako smo dobili da ova ploha u svakoj točki ima minimalnu zakrivljenost $H = 0$, zaključujemo da je minimalna ploha! Štoviše, to vrijedi za svaki $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Promotrimo što se događa sa Gaussovom zakrivljenošću. Već smo pokazali da je dana ploha za $av < 0$ prostorna, pa je $\epsilon = -1$. U slučaju $av > 0$ dana ploha je vremenska, pa je $\epsilon = 1$. Za ovu nam plohu vrijedi:

$$K < 0, \forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \forall v$$

U svakom se slučaju radi o vitoperoj pravčastoj plohi.



Slika 4.7: Minimalna pravčasta ploha 4

Na slici se lijepo mogu vidjeti pravci na ovoj minimalnoj plohi.

Literatura

[1] W. Kühlen. *Differential geometry, Curves - Surfaces - Manifolds.* American mathematical society, Providence, 2002.

[2] F. Manhart. *Affine Geometry of Minkowski Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3_1$. Hrvatsko društvo za geometriju i grafiku, Zagreb, 2007.

[3] B. Žarinac Frančula. *Diferencijalna geometrija.* Školska knjiga, Zagreb, 1990.