

Projekt matematika+ 2013.  
Hotelijersko-turistička škola  
Zagreb

# Nebo se spustilo u Zagreb

Učenici:

Suzana Barać, 3e  
Lucija Slukan, 3d  
Ivana Volf, 3c  
Mihael Posavčić, 3b  
Martin Punek, 3f

Mentor:

Josip Kličinović, prof.

Zagreb, travanj 2013.

## Sadržaj

1.	Uvod.....	4
2.	Umjetnost.....	5
2.1.	Prizemljeno Sunce .....	5
2.2.	Devet Pogleda.....	7
3.	Matematika .....	8
3.1.	Elipsa i orbite planeta .....	8
3.2.	Veličine planeta u Zagrebu.....	10
3.3.	Udaljenosti planeta u Zagrebu .....	11
4.	Fotografije modela planeta.....	14
5.	Zaključak.....	19
6.	Izvori .....	20

## Popis fotografija

Slika 1: Prizemljeno Sunce .....	5
Slika 2: Ploča uz Prizemljeno Sunce.....	6
Slika 3: Elipsa.....	8
Slika 4: Orbite planeta ucrtane na kartu .....	11
Slika 5: Orbite prvih pet planeta u Zagrebu .....	13
Slika 6: Model Merkura .....	14
Slika 7: Model Venere.....	14
Slika 8: Model Zemlje .....	15
Slika 9: Model Marsa .....	15
Slika 10: Model Jupitera .....	16
Slika 11: Model Saturna .....	16
Slika 12: Model Urana .....	17
Slika 13: Model Neptuna.....	17
Slika 14: Model Plutona .....	18
Slika 15: Računali smo i zabavljali se! .....	19

## Popis tablica

Tablica 1: Orbite planeta .....	9
Tablica 2: Promjeri planeta i modela planeta.....	10
Tablica 3: Udaljenost planeta u Zagrebu.....	12

## 1. Uvod

Za ovogodišnju smo smotru matematika+ odlučili obraditi zanimljivu i unikatnu instalaciju u Gradu Zagrebu. Radi se o instalaciji Devet pogleda (Nine Views) autora Davora Preisa koja je postavljeno u odnosu na skulpturu Prizemljeno Sunce autora Ivana Kožarića. Preis je svoju instalaciju napravio na sljedećem principu: da je Sunce zbilja veličine kao Kožarićevo Prizemljeno Sunce, koje bi veličine bile planete iz Sunčeva sustava te gdje bi se nalazile. Jasno je da je tu morao provesti precizne matematičke proračune. Te iste proračune smo i mi proveli te usporedili s Preisovim proračunima i s podacima Geodetskog fakulteta u Zagrebu. Dakle, cilj našeg projekta bio je istražiti jednu zanimljivu umjetničku instalaciju, a ujedno se i igrati matematikom i provjeriti je li instalacija precizna. Pri tome smo upotrijebili znanje o elipsi iz 3. razreda srednje škole te razmjera iz 7. razreda osnovne škole/1. razreda srednje škole. Upotrijebili smo program GeoGebra uz pomoć kojeg smo puno preciznije izmjerili udaljenosti modela na karti te nacrtali orbite nekih planeta.

## 2. Umjetnost

### 2.1. Prizemljeno Sunce

Prizemljeno Sunce naziv je skulpture Ivana Kožarića izrađene davne 1971. godine.

Prizemljeno Sunce brončana je skulptura kugle promjera 2 metra. Inicijalno je bila postavljena na Kazališnom trgu (danas Trg maršala Tita), a kasnije je (1994. godine) prebačeno na današnju lokaciju u Bogovićevoj ulici.



Slika 1: Prizemljeno Sunce

(fotografija preuzeta s [www.pticica.com](http://www.pticica.com))

Skulptura je često na meti vandala koji je šaraju ili zatrpavaju glomaznim otpadom.

Prizemljeno Sunce trenutno se nalazi na restauraciji, ali je na mjestu gdje se inače nalazi ostala ploča kao podsjetnik na skulpturu. Mediji su prenijeli glasine da će Prizemljeno Sunce biti pomaknuto za nekoliko metara kako ne bi smetalo na ulici. Ukoliko do toga dođe, cijela će instalacija biti narušena!



Slika 2: Ploča uz Prizemljeno Sunce

Kako je promjer našeg Sunca  $1\ 392\ 000$  km, a promjer Kožarićeva Prizemljenog Sunca  $2$  m ( $200$  cm), jasno je da je Kožarićeva skulptura  $6.96 \cdot 10^8$  puta manja od pravog Sunca. Zbog jednostavnosti proračuna, u ostatku rada nećemo raditi pretvorbu jedinica (kilometre u centimetre ili centimetre u kilometre), već ćemo promjere i udaljenosti „pravih“ planeta razmatrati u kilometrima, promjere modela planeta u centimetrima, a udaljenosti od Sunca u metrima. Tako ćemo uzimati da je koeficijent sličnosti  $6960$  (ukoliko promatramo veličinu Prizemljenog Sunca u metrima).

## 2.2. Devet Pogleda

Davor Preis zagrebački je umjetnik i autor instalacije Devet pogleda (Nine Views). Rođen je 1966. godine u Zagrebu gdje je i diplomirao. Član je hrvatskog društva likovnih umjetnika. Do sada je imao dvanaest samostalnih i osam skupnih izložbi. Živi u Zagrebu pod imenom Daworp Earthman.

Preis je 2004.godine, uvezši Kožarićevo „Prizemljeno Sunce“ kao temelj, oko njega napravio cijeli Sunčev sustav. Nalazi se u Zagrebu i sastoji se od devet kugli koje simboliziraju planete. One su napravljene u jednakom mjerilu kao i Kožarićevo Sunce, a njihove udaljenosti u istom mjerilu kao i u Sunčevom sustavu. Iz tog se razloga neke se planete (kugle) nalaze na nepristupačnim mjestima, dok su njih četiri u centru grada. Pluton, iako službeno više nije planet (po novoj se definiciji planeta od 2006. godine smatra novom vrstom transneptunskih tijela, patuljasti planet), i dalje je dio ove umjetničke instalacije. Stoga Pluton ravnopravno uzimamo u naše izračune.

Planete su predstavljene sjajnim metalnim pločicama i kuglama. Na tim je pločicama naveden podatak o radijusu planete i srednja udaljenost od Sunca.

Na žalost, dijelovi instalacije često su na meti vandala. Kuglica koja predstavlja Pluton je nestala prije nekoliko godina, ali je ostala pločica. Kuglica nikad nije nadomještena novom.

### 3. Matematika

#### 3.1. Elipsa i orbite planeta

Prva nedoumica na koju smo naišli jest je li Preis model Sunčevog sustava radio po modelu elipse ili po modelu kružnice. U fizici je poznat prvi Keplerov zakon koji tvrdi:

Planeti se gibaju po elipsama kojima je u jednom od žarišta Sunce.

Pretpostavljali smo da je Preis radio po modelima kružnica. Naravno, takav je model puno jednostavniji od modela elipse.

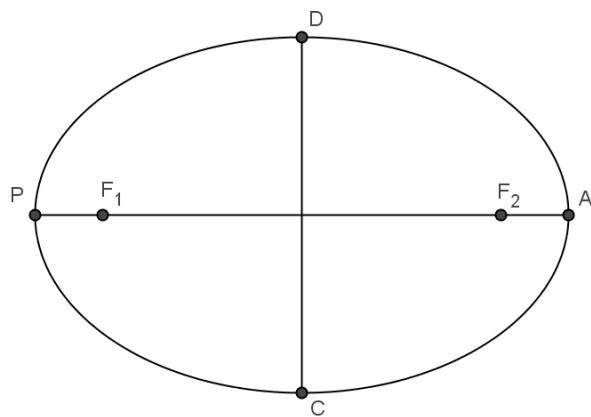
Elipsa je krivulja drugog reda za koju vrijedi da je zbroj udaljenosti žarištâ od bilo koje točke na elipsi konstantna i iznosi  $2a$  (duljina velika osi).

Elipsu u analitičkoj geometriji predstavljamo jednadžbom  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , gdje je  $a$  duljina velike osi ( $\frac{1}{2}\overline{PA}$ ), a  $b$  duljina male poluosi ( $\frac{1}{2}\overline{CD}$ ).

U analitičkoj geometriji elipse postoje i dvije vrlo bitne veličine. Jedna je linearni ekscentricitet kojeg računamo formulom  $e^2 = a^2 - b^2$ , a druga je numerički ekscentricitet kojeg računamo formulom  $\varepsilon = \frac{e}{a}$  te za elipsu uvijek vrijedi  $0 < \varepsilon < 1$ . Važno je za napomenuti da su koordinate žarišta (fokusa)  $F_1(-e, 0)$ ,  $F_2(e, 0)$ .

Geometrijska interpretacija ekscentricitetâ je sljedeća:

- Linearni ekscentricitet mjeri izduženost elipse: što je  $e$  veći, to je žarišta udaljenija od centra, a elipsa izduženija (za kružnicu je  $e = 0$ );
- Numerički ekscentricitet mjeri spljoštenost elipse: što je  $\varepsilon$  veći, to elipsa više odstupa od kružnice kojoj je promjer velika os (za kružnicu je  $\varepsilon = 0$ ).



Slika 3: Elipsa

Neka se Sunce nalazi u žarištu  $F_1$ . Točka  $P$  je najbliža Suncu te se naziva perihel (grč. *peri* = oko, *helios* = Sunce), a točka  $A$  je najudaljenija od Sunca te se naziva afel (grč. *apo* = od, *helios* = Sunce). Označimo s  $x$  perihel, a s  $y$  afel. Jasno je da je duljina velike poluosni  $a = x + y$ . Kako se fokusi nalaze simetrično s obzirom na središte elipse (sjecište velike i male osi), lako se može doći do zaključka da je  $2x + 2e = a$ , a kako je  $a = x + y$  zaključujemo da je  $e = \frac{y-x}{2}$ . Potom iz relacije  $e^2 = a^2 - b^2$  lako možemo izračunati duljinu male poluosni elipse. Ovaj nam je račun potreban jer u svim izvorima pronalazimo samo podatke o najmanjoj i najvećoj udaljenosti planeta od Sunca te je to jedini način kako možemo izračunati ostale podatke o orbiti tog planeta i donijeti zaključak o orbiti. U tablici slijede podaci za sve planete Sunčevog sustava (uključujući i Pluton koji službeno više nije planet, ali je i dalje dio instalacije).

Planet	Afel ( $y, \text{km}$ )	Perihel ( $x, \text{km}$ )	Velika poluos ( $a, \text{km}$ )	Mala poluos ( $b, \text{km}$ )	Linearni ekscenticiteti ( $e, \text{km}$ )	Numerički ekscenticitet ( $\varepsilon$ )
Merkur	$7 \cdot 10^7$	$4.6 \cdot 10^7$	$5.8 \cdot 10^7$	$5.7 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^7$	0.21
Venera	$1.1 \cdot 10^8$	$1.1 \cdot 10^8$	$1.1 \cdot 10^8$	$1.1 \cdot 10^8$	0	0
Zemlja	$1.52 \cdot 10^8$	$1.47 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^8$	$2.5 \cdot 10^6$	0.02
Mars	$2.5 \cdot 10^8$	$2.1 \cdot 10^8$	$2.3 \cdot 10^8$	$2.29 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^7$	0.09
Jupiter	$8.2 \cdot 10^8$	$7.4 \cdot 10^8$	$7.8 \cdot 10^8$	$7.75 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^7$	0.05
Saturn	$1.5 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^9$	$1.45 \cdot 10^9$	$1.45 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^7$	0.04
Uran	$3 \cdot 10^9$	$2.7 \cdot 10^9$	$2.85 \cdot 10^9$	$2.85 \cdot 10^9$	$1.5 \cdot 10^8$	0.05
Neptun	$4.6 \cdot 10^9$	$4.5 \cdot 10^9$	$4.55 \cdot 10^9$	$4.5 \cdot 10^9$	$5 \cdot 10^7$	0.01
Pluton	$7.3 \cdot 10^9$	$4.4 \cdot 10^9$	$5.85 \cdot 10^9$	$5.56 \cdot 10^9$	$1.45 \cdot 10^9$	0.25

*Tablica 1: Orbite planeta*

Iz tablice je vidljivo (po parametru  $\varepsilon$ ) da su orbite gotovo kružne, pogotovo Venerina. Od svih planeta najizduženiju orbitu imaju Merkur i Pluton.

Na temelju tih ćemo podataka pretpostaviti da je Preis za svoju instalaciju upotrijebio model kružnice, pri čemu je radijus jednak duljini velike poluosni.

### 3.2. Veličine planeta u Zagrebu

U potpoglavlju (2.1.) izračunali smo da je pravo Sunce od Prizemljenog Sunca veće 696 000 000 puta te smo napomenuli da ćemo taj podatak uzeti kao koeficijent sličnosti. Također smo napomenuli da svjesno grijesimo „miješajući“ kilometri i metre, a da to činimo kako bismo pojednostavnili račun. U nastavku donosimo tablicu u kojoj pokazujemo kolike bi trebale biti veličine planeta u postavljenoj instalaciji. Pri tome se služimo razmjerom  $k = \frac{2R_s}{2R_i}$ , gdje je  $k$  koeficijent sličnosti,  $2R_s$  stvarni promjer planete, a  $2R_i$  promjer koji bi trebali imati modeli planeta u Zagrebu. Također donosimo podatak o stvarnoj veličini modela planeta u Zagrebu te grešku u promjeru.

Planet	Promjer planeta ( $2R_s$ , km)	Teorijski promjer modela ( $2R_i$ , cm)	Stvarni promjer modela (cm)	Greška promjera modela (cm)
Merkur	4878	0.7	0.7	0
Venera	12103	1.74	1.7	0.04
Zemlja	12756	1.83	1.8	0.03
Mars	6786	0.98	1	0.02
Jupiter	142980	20.54	28	7.46
Saturn	120540	17.32	21	3.68
Uran	51120	7.34	8.9	1.56
Neptun	49530	7.11	8.6	1.21
Pluton	2280	0.33	0.3	0.03

*Tablica 2: Promjeri planeta i modela planeta*

Podaci o stvarnom promjeru modela preuzeti su s [4] koju su za potrebe svog projekta izmjerile studentice Geodetskog fakulteta u Zagrebu (2009. godine). Nismo upoznati jesu li autori tog projekta računali teorijske promjere modela planeta.

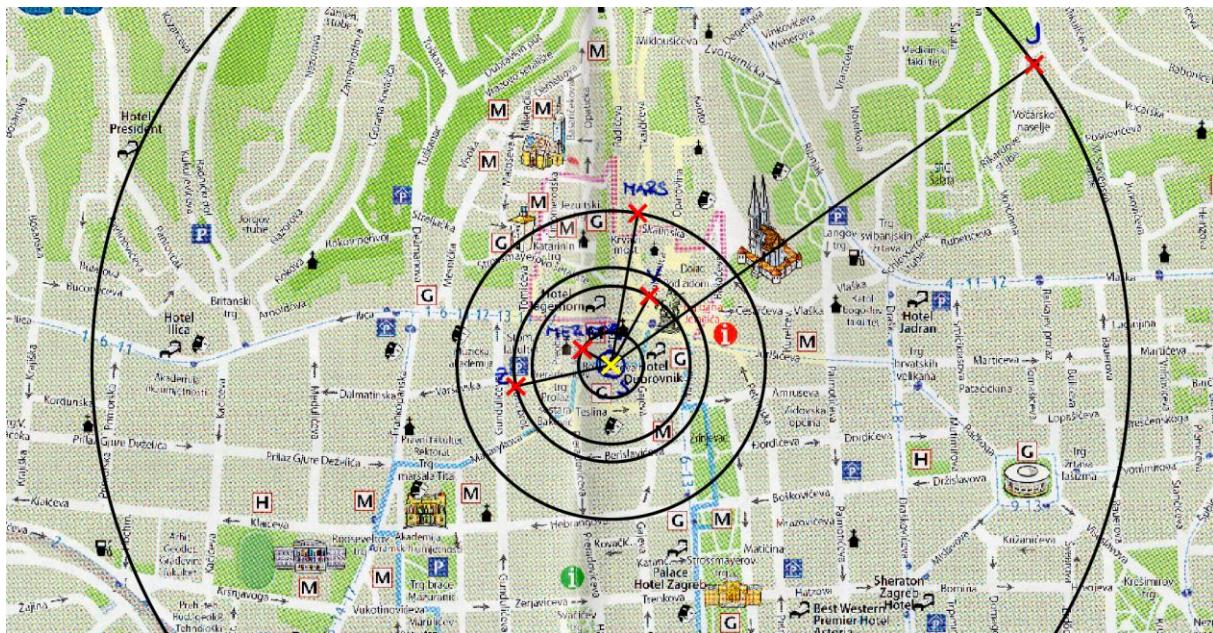
### 3.3. Udaljenosti planeta u Zagrebu

Analogno računima iz prethodnih poglavlja, proveli smo račune koliko bi planete u Zagrebu trebale biti udaljene od Sunca. Pri tome nam je koeficijent sličnosti jednak prijašnjem, a

formula koju smo koristili je  $k = \frac{r_s}{r_m}$ , gdje je  $r_s$  stvarna udaljenost planete od Sunca

(koristili smo podatak o srednjoj udaljenosti jer su orbite gotovo kružne), a  $r_m$  teorijska udaljenost modela planeta od Prizemljenog Sunca. Osim toga, u kartu Zagreba ucrtali smo položaje Prizemljenog Sunca i modela planeta te smo koristeći omjer naveden na karti izračunali stvarnu udaljenost modela planeta od Prizemljenog Sunca. Pri tome smo, želeći što točnije, izmjeriti udaljenost modela od Prizemljenog Sunca, koristili program GeoGebra.

Naravno, pri tome očekujemo određenu grešku koja je proizvod krivo ucrtanog položaja planete na kartu Zagreba budući i mali dio milimetra na karti uzrokovat će pogrešan izračun udaljenosti u stvarnosti.



Slika 4: Orbite planeta ucrtane na kartu

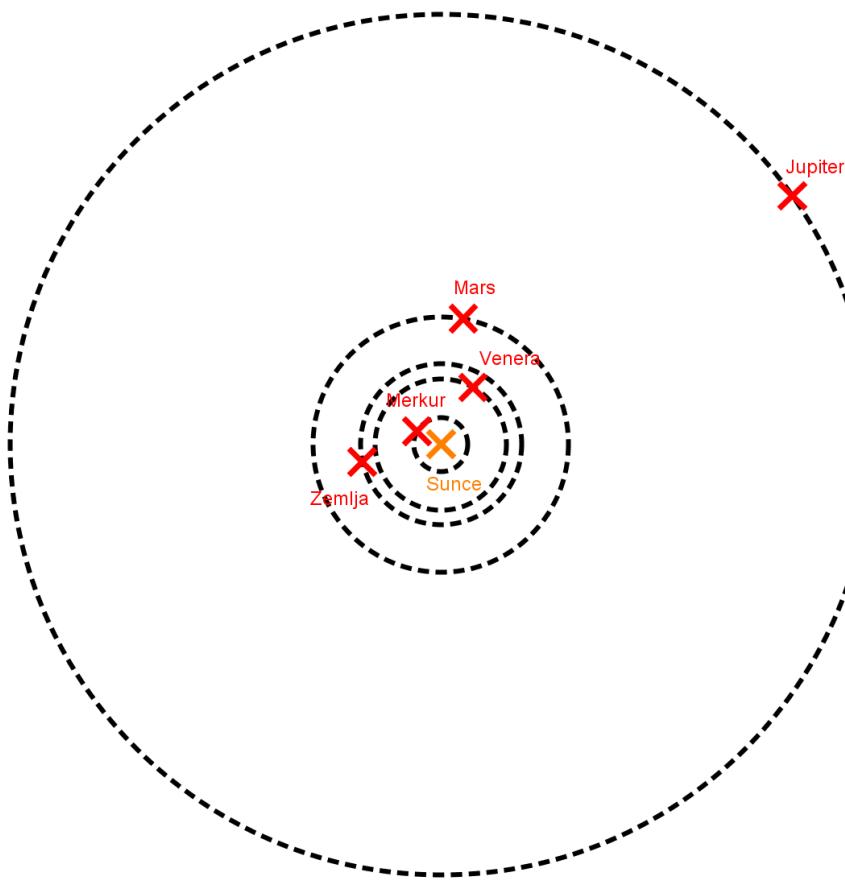
Planet	Srednja udaljenost od Sunca (km)	Teorijska udaljenost od Prizemljenog Sunca (m)	Izmjerena udaljenost na karti (mm)	Izračunata udaljenost modela na karti (m)	Udaljenost modela po Geodetskom fakultetu (m)
Merkur	$5.79 \cdot 10^7$	83.2	5.5	75	75
Venera	$1.082 \cdot 10^8$	155.5	14	175	140.1
Zemlja	$1.496 \cdot 10^8$	215	17	212.5	193.7
Mars	$2.279 \cdot 10^8$	327.44	23	331.25	295.2
Jupiter	$7.783 \cdot 10^8$	1118.25	89	1118.7	1176
Saturn	$1.427 \cdot 10^9$	2050.29	—	—	1851.2
Uran	$2.8696 \cdot 10^9$	4123	—	—	3718.2
Neptun	$4.4966 \cdot 10^9$	6460.63	—	—	5833.5
Pluton	$5.9 \cdot 10^9$	8477	—	—	7658.6

*Tablica 3: Udaljenost planeta u Zagrebu*

Iz tablice je razvidno da postoji stanovita razlika među teorijskim udaljenostima te našim mjeranjima i mjeranjima Geodetskog rezultata. Kod nekih je udaljenosti naš račun bliži teorijskoj udaljenosti od mjerjenja Geodetskog fakulteta.

Za modele Saturna, Urana, Neptuna i Plutona nismo izvršili mjerjenja na karti jer nismo imali dovoljno veliku kartu. Kako su to planeti koji su u Sunčevom sustavu dosta udaljeni od Sunca, i bilo je za očekivati da će u Zagrebu biti postavljeni jako daleko od Prizemljenog Sunca. I ovdje nailazimo na razliku između teorijske udaljenosti od Prizemljenog Sunca i udaljenosti po Geodetskom fakultetu.

Zanimljivo je ovdje primijetiti da se podatak o udaljenosti planeta od Sunca koji su ugravirani u pločicu poklapaju s našim izračunima o duljini velike poluosni, odnosno srednjoj udaljenosti od Sunca (vidi tablicu 1).



Slika 5: Orbite prvih pet planeta u Zagrebu

Na slici 5 su prikazane orbite prvih pet planeta u Zagrebu te „trenutni“ položaj planeta. Preostale četiri orbite nisu ucrtane zbog velike udaljenosti. Slika 5 nastala je uklanjanjem karte sa slike 4.

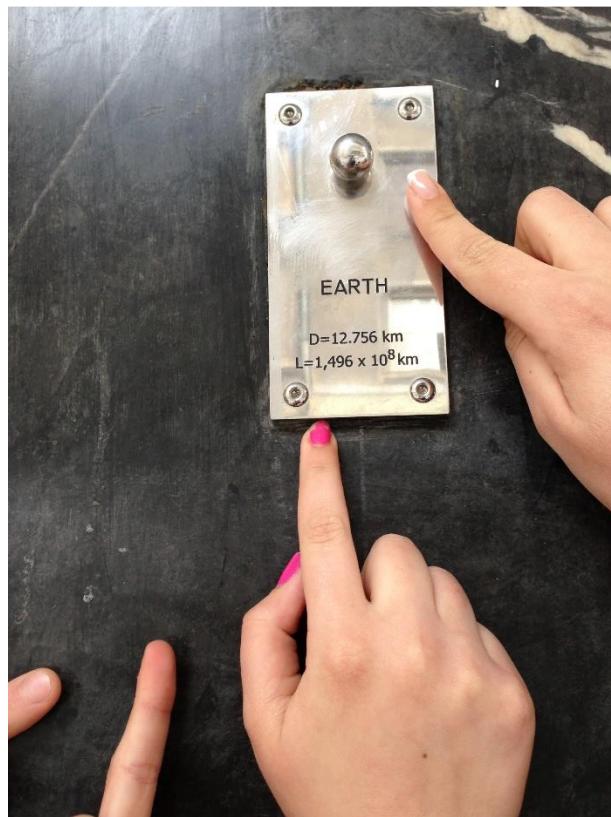
#### 4. Fotografije modela planeta



Slika 6: Model Merkura



Slika 7: Model Venere



Slika 8: Model Zemlje



Slika 9: Model Marsa



Slika 10: Model Jupitera

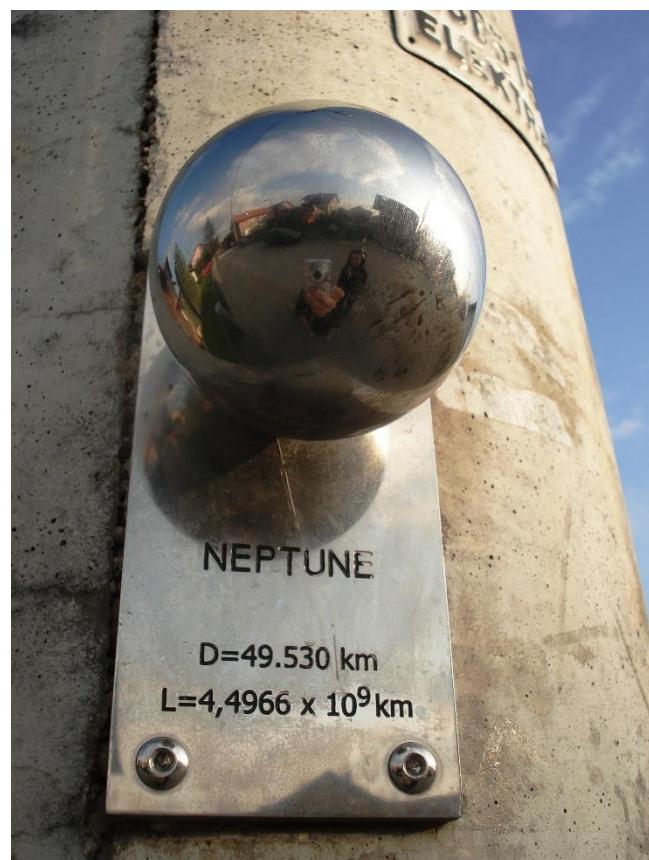


Slika 11: Model Saturna

Projekt matematika+ 2013.  
“Nebo se spustilo u Zagreb”  
Hotelijersko-turistička škola, Zagreb



Slika 12: Model Urana



Slika 13: Model Neptuna

Projekt matematika+ 2013.  
“Nebo se spustilo u Zagreb”  
Hotelijersko-turistička škola, Zagreb



*Slika 14: Model Plutona*

*(model uništen; kugla ukradena)*

## 5. Zaključak

Kroz ovaj smo rad primijenili svoje znanje iz matematike koje smo stekli na redovnoj nastavi. Kako u školi koju polazimo ne postoje predmeti Fizika i Astronomija, naučili smo nešto novo i o tom području. Pri tome smo još jednom uvidjeli svrhotnost matematike i primjenu u fizici i astronomiji, ali i u umjetnosti!

Što dalje? Naša škola ima usko surađuje s Hrvatskom Turističkom Zajednicom i Turističkom Zajednicom Grada Zagreba te planiramo tu suradnju upotpuniti izradom letka o Prizemljenom Suncu i instalaciji Devet pogleda. Taj letak planiramo prevesti na strane jezike koje učimo u našoj školi: engleski, njemački, talijanski, francuski, španjolski i ruski jezik te ih ponuditi Turističkoj Zajednici kako bi ih oni dali zainteresiranim turistima. Osim toga, jednu ćemo verziju plakata koji predstavljamo na smotri matematika+ ponuditi Turističkoj Zajednici.



*Slika 15: Računali smo i zabavljali se!*

## 6. Izvori

- [1] Dakić, B., Elezović N. (2009.) Matematika 3 II. dio: Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija. 4. izdanje. Zagreb: Element.
- [2] Roša, D. (2011.) Elementarna astronomija I. dio: Osnove sferne astronomije i i nebeske mehanike. 1. izdanje. Zagreb: Alfa.
- [3] Vujnović V. (1997.) Astronomija za učenike osnovne škole. Zagreb: Element.
- [4] Projekt Geodetskog fakulteta. 2009. <http://astrogeo.geoinfo.geof.hr/przsunce/index.html> (pristupljeno 25. travnja 2013.)