Verižni razlomci

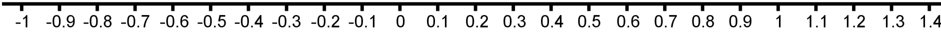
Jedna metoda dokazivanja iracionalnosti

Josip Kličinović
kjosip@net.amis.hr

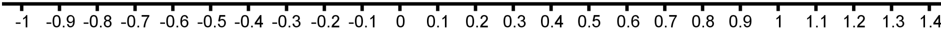
Hotelijersko-turistička škola
Zagreb

Split, studeni 2011.

Krenimo popunjavati brojevni pravac!

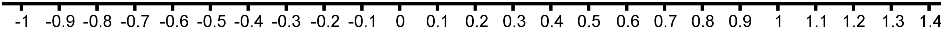


Krenimo popunjavati brojevni pravac!



Na brojevnom pravac lako smještamo (znamo još iz OŠ!):

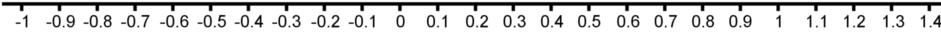
Krenimo popunjavati brojevni pravac!



Na brojevnom pravac lako smještamo (znamo još iz OŠ!):

- prirodne brojeve - $\mathbb{N}$

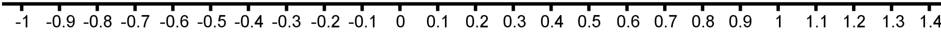
Krenimo popunjavati brojevni pravac!



Na brojevnom pravac lako smještamo (znamo još iz OŠ!):

- prirodne brojeve - $\mathbb{N}$
- cijele brojeve - $\mathbb{Z}$

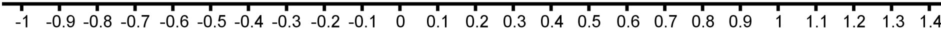
Krenimo popunjavati brojevni pravac!



Na brojevnom pravac lako smještamo (znamo još iz OŠ!):

- prirodne brojeve - $\mathbb{N}$
- cijele brojeve - $\mathbb{Z}$
- racionalne brojeve - $\mathbb{Q}$

Krenimo popunjavati brojevni pravac!



Na brojevnom pravac lako smještamo (znamo još iz OŠ!):

- prirodne brojeve - $\mathbb{N}$
- cijele brojeve - $\mathbb{Z}$
- racionalne brojeve - $\mathbb{Q}$

Ima li još mjesta na pravcu?!

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?
Ako su a i b dva broja (elementa) iz skupa $\mathbb{Q}$, između njih se nalazi beskonačno mnogo brojeva koji su također u skupu $\mathbb{Q}$.

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?
Ako su a i b dva broja (elementa) iz skupa $\mathbb{Q}$, između njih se nalazi beskonačno mnogo brojeva koji su također u skupu $\mathbb{Q}$.
Hmmmmm....možemo li to nekako matematički razraditi?

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?
Ako su a i b dva broja (elementa) iz skupa $\mathbb{Q}$, između njih se nalazi beskonačno mnogo brojeva koji su također u skupu $\mathbb{Q}$.
Hmmmmm....možemo li to nekako matematički razraditi?
DA, MOŽEMO!

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?
Ako su a i b dva broja (elementa) iz skupa $\mathbb{Q}$, između njih se nalazi beskonačno mnogo brojeva koji su također u skupu $\mathbb{Q}$.
Hmmmmm....možemo li to nekako matematički razraditi?
DA, MOŽEMO!

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Jedno od svojstava skupa $\mathbb{Q}$ jest da je on **gust**.
Što to točno znači?
Ako su a i b dva broja (elementa) iz skupa $\mathbb{Q}$, između njih se nalazi beskonačno mnogo brojeva koji su također u skupu $\mathbb{Q}$.
Hmmmmm....možemo li to nekako matematički razraditi?
DA, MOŽEMO!

$$c = \frac{a+b}{2}$$

...te na taj način dolazimo do toga da između svaka dva postoji još barem jedan (a zapravo ih je beskonačno mnogo!)...

Jesmo li prethodnim postupkom pokrili baš SVE brojeve na brojevnom pravcu???

Jesmo li prethodnim postupkom pokrili baš SVE brojeve na brojevnom pravcu???

Niiiiismoooooooooo! Ostalo je puuuuno "rupa" koje su nepokrivene!

Jesmo li prethodnim postupkom pokrili baš SVE brojeve na brojevnom pravcu???

Niiiiismoooooooooo! Ostalo je puuuuno "rupa" koje su nepokrivene!

Kako te rupe pokrpati? iliti Hm, kakvi onda brojevi pokrivaju te rupe?

Jesmo li prethodnim postupkom pokrili baš SVE brojeve na brojevnom pravcu???

Niiiiismoooooooooo! Ostalo je puuuuno "rupa" koje su nepokrivene!

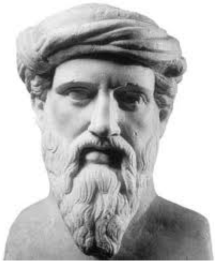
Kako te rupe pokrpati? iliti Hm, kakvi onda brojevi pokrivaju te rupe?

Da bismo na ovo pitanje dali odgovor, moramo se vratiti u daleku prošlost, u Antičku Grčku!

Krenimo na putovanje!

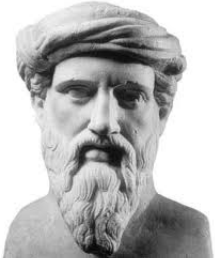
Krenimo na putovanje!

Čuli ste za Pitagoru?



Krenimo na putovanje!

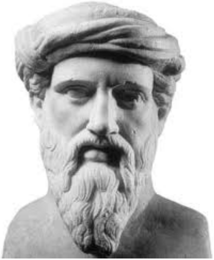
Čuli ste za Pitagoru?



A za Hipasusa?

Krenimo na putovanje!

Čuli ste za Pitagoru?

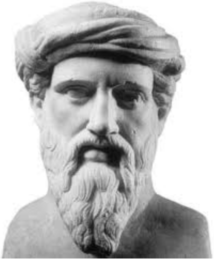


A za Hipasusa?

Pitagora i njegovi sljedbenici (pitagorejci) su tvrdili da su sve (geometrijske) veličine sumjerljive, odnosno prikazive u obliku omjera prirodnih brojeva $\Rightarrow$ postoje samo racionalni brojevi!

Krenimo na putovanje!

Čuli ste za Pitagoru?

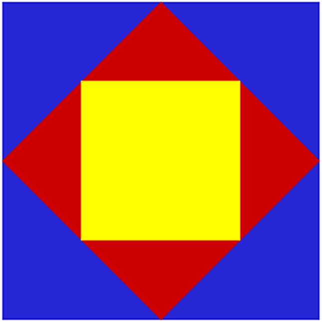


A za Hipasusa?

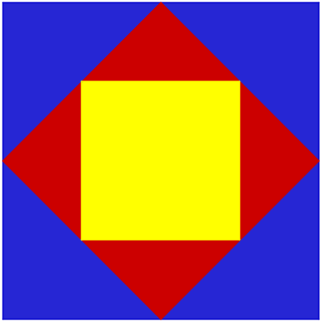
Pitagora i njegovi sljedbenici (pitagorejci) su tvrdili da su sve (geometrijske) veličine sumjerljive, odnosno prikazive u obliku omjera prirodnih brojeva $\Rightarrow$ postoje samo racionalni brojevi!

Tu u priču ulazi Hipasus!

Legenda kaže da je Hipasus promatrao sljedeću sliku...

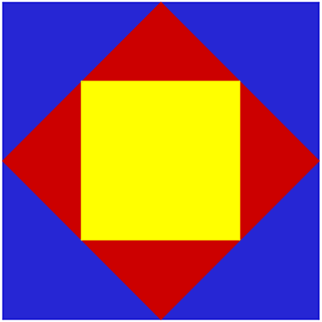


Legenda kaže da je Hipasus promatrao sljedeću sliku...



...i primijetio da stranica i dijagonala u kvadratu NISU sumjerljive!

Legenda kaže da je Hipasus promatrao sljedeću sliku...



...i primijetio da stranica i dijagonala u kvadratu NISU sumjerljive!

To otkriće je toliko sablaznilo njegove kolege pitagorejce da su ga odlučili baciti sa palube broda i pustiti ga da se utopi. ☹

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Zamjenom $m \longleftrightarrow 2k$ dobijemo $2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Zamjenom $m \longleftrightarrow 2k$ dobijemo $2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Dakle, i n je paran.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Zamjenom $m \longleftrightarrow 2k$ dobijemo $2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Dakle, i n je paran.

Dobili smo da su i m i n parni.

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Zamjenom $m \longleftrightarrow 2k$ dobijemo $2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Dakle, i n je paran.

Dobili smo da su i m i n parni. Jesu li onda relativno prosti?!

Kako je ustvari on došao do nesumjerljivosti?
Klasičan dokaz nesumjerljivosti (iracionalnosti) broja $\sqrt{2}$:

Pretpotavimo suprotno, odnosno: $\sqrt{2}$ je racionalan broj!

Tada se on može zapisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su m i n relativno prosti brojevi $(m, n) = 1$.

Kvadrirajući gornju relaciju dobijemo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $2n^2 = m^2$.

Očito je broj m paran (zašto?), pa ga možemo zapisati u obliku $m = 2k$.

Zamjenom $m \longleftrightarrow 2k$ dobijemo $2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$.

Dakle, i n je paran.

Dobili smo da su i m i n parni. Jesu li onda relativno prosti?!
$\sqrt{2}$ NIJE racionalan, dakle, on je iracionalan!

Na sličan je način Teodor iz Kirene dokazao da su iracionalni svi brojevi $\sqrt{n}, n < 18, n \neq \blacksquare$.

Na sličan je način Teodor iz Kirene dokazao da su iracionalni svi brojevi $\sqrt{n}, n < 18, n \neq \blacksquare$.

Taj je dokaz jednostavan za brojeve tog oblika. Ali što je sa brojem, npr. $\frac{5+\sqrt{3}}{7}$?

Na sličan je način Teodor iz Kirene dokazao da su iracionalni svi brojevi $\sqrt{n}, n < 18, n \neq \blacksquare$.

Taj je dokaz jednostavan za brojeve tog oblika. Ali što je sa brojem, npr. $\frac{5+\sqrt{3}}{7}$?

Taj je dokaz vrlo kompliciran i nije elementaran kao prethodni primjer!

Na sličan je način Teodor iz Kirene dokazao da su iracionalni svi brojevi $\sqrt{n}, n < 18, n \neq \blacksquare$.

Taj je dokaz jednostavan za brojeve tog oblika. Ali što je sa brojem, npr. $\frac{5+\sqrt{3}}{7}$?

Taj je dokaz vrlo kompliciran i nije elementaran kao prethodni primjer!

Tu u pomoć uskače "teorija brojeva"!

Verižni razlomak je razlomak oblika $\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}}$

Verižni razlomak je razlomak oblika $\alpha = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}}$

Ako dodatno zahtjevamo da su svi $b_i = 1$, onda gornji razlomak nazivamo jednostavni verižni razlomak i kraće zapisujemo $\alpha = \frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, pri čemu sve a_i nazivamo parcijalni kvocijenti.

Kako razviti racionalan broj u (jednostavni) verižni razlomak?

Kako razviti racionalan broj u (jednostavni) verižni razlomak?

Euklidov algoritam:

Kako razviti racionalan broj u (jednostavni) verižni razlomak?

Euklidov algoritam:

$$p = q \cdot a_0 + r_1$$

$$q = r_1 \cdot a_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 = a_2 + r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot a_n$$

Pogledajmo kako algoritam radi na primjeru broja $\frac{35}{3}$.

Pogledajmo kako algoritam radi na primjeru broja $\frac{35}{3}$.

$$35 = 3 \cdot 11 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 2$$

$\frac{35}{3} = [11; 1, 2]$

Pogledajmo kako algoritam radi na primjeru broja $\frac{35}{3}$.

$$35 = 3 \cdot 11 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2$$

$\frac{35}{3} = [11; 1, 2]$

Zapišimo to u obliku razlomka:

Pogledajmo kako algoritam radi na primjeru broja $\frac{35}{3}$.

$$35 = 3 \cdot 11 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2$$

$\frac{35}{3} = [11; 1, 2]$
Zapišimo to u obliku razlomka:

$$\frac{35}{3} = 11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$$

Pogledajmo kako algoritam radi na primjeru broja $\frac{35}{3}$.

$$35 = 3 \cdot 11 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2$$

$\frac{35}{3} = [11; 1, 2]$
Zapišimo to u obliku razlomka:

$$\frac{35}{3} = 11 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$$

Provjerimo to $\Rightarrow 11 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 11 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 11 + \frac{2}{3} = \frac{35}{3}$.

Zadatak!

Izaberi neki razlomak po volji i zapiši ga u obliku verižnog razlomka! Svoje rješenje provjeri!

Zadatak!

Izaberi neki razlomak po volji i zapiši ga u obliku verižnog razlomka! Svoje rješenje provjeri!

Vjerojatno ste primijetili da racionalni brojevi (konačni decimalni brojevi) imaju konačan rastav u verižni razlomak!

Što ako imamo neki veći rastav, npr. $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$?

Što ako imamo neki veći rastav, npr. $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$?

Hoćemo li biti dovoljno *ludi* (☺) za to napisati u obliku verižnog razlomka?!

Što ako imamo neki veći rastav, npr. $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$?

Hoćemo li biti dovoljno *ludi* (☺) za to napisati u obliku verižnog razlomka?!

Može to i lakše!

Što ako imamo neki veći rastav, npr. $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7]$?

Hoćemo li biti dovoljno *ludi* (☺) za to napisati u obliku verižnog razlomka?!

Može to i lakše!

Koristimo tablicu i sljedeći algoritam:

$$p_{-2} = 0, \qquad p_{-1} = 1, \qquad p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_{-2} = 1, \qquad q_{-1} = 0, \qquad q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}$$

Ili....pogledajmo to kako izgleda tablično!

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	3	4	5	6	7
p_k	0	1	1	3	10	43	225	1393	9976
q_k	1	0	1	2	7	30	157	972	6961

Dakle, $[1; 2, 3, 4, 5, 6, 7] = \frac{9976}{6961}$

Pogledajmo opet tablicu:

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	3	4	5	6	7
p_k	0	1	1	3	10	43	225	1393	9976
q_k	1	0	1	2	7	30	157	972	6961

Pogledajmo opet tablicu:

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	3	4	5	6	7
p_k	0	1	1	3	10	43	225	1393	9976
q_k	1	0	1	2	7	30	157	972	6961

Broj $\frac{p_k}{q_k}$ nazivamo k-ta konvergenta u razvoju te predstavlja približnu vrijednost broja α.

Pogledajmo opet tablicu:

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	3	4	5	6	7
p_k	0	1	1	3	10	43	225	1393	9976
q_k	1	0	1	2	7	30	157	972	6961

Broj $\frac{p_k}{q_k}$ nazivamo k-ta konvergenta u razvoju te predstavlja približnu vrijednost broja α.

Na primjer, treća konvergenta u ovom razvoju je $\frac{43}{30} \approx 1.4\dot{3}$, a točna je vrijednost $\frac{9976}{6961} = 1.433127424220658$, što je točnost do na treću decimalu! Odlično!

Dakle, saznali smo da će racionalni brojevi imati konačan razvoj u verižni razlomak.

Dakle, saznali smo da će racionalni brojevi imati konačan razvoj u verižni razlomak.

Pretpotavljamo da će iracionalni brojevi imati beskonačan razvoj u verižni razlomak.

Promatrat ćemo samo jednu posebnu klasu brojeva, tzv. kvadratne iracionalnosti.

Promatrat ćemo samo jednu posebnu klasu brojeva, tzv. kvadratne iracionalnosti.

Kvadratna iracionalnost je broj oblika $\dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$.

Promatrat ćemo samo jednu posebnu klasu brojeva, tzv. kvadratne iracionalnosti.

Kvadratna iracionalnost je broj oblika $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Postoji nekoliko tehnika kako kvadratnu iracionalnost razviti u verižni razlomak.

Promatrat ćemo samo jednu posebnu klasu brojeva, tzv. kvadratne iracionalnosti.

Kvadratna iracionalnost je broj oblika $\dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$.

Postoji nekoliko tehnika kako kvadratnu iracionalnost razviti u verižni razlomak.

Jedna od njih je sljedeća:

Promatrat ćemo samo jednu posebnu klasu brojeva, tzv. kvadratne iracionalnosti.

Kvadratna iracionalnost je broj oblika $\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Postoji nekoliko tehnika kako kvadratnu iracionalnost razviti u verižni razlomak.

Jedna od njih je sljedeća:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{a+\sqrt{b}}{c}, &\qquad a_0 &= \lfloor \alpha \rfloor \\
\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha - a_0}, &\qquad a_1 &= \lfloor \alpha_1 \rfloor \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - a_1}, &\qquad a_2 &= \lfloor \alpha_2 \rfloor \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pokažimo to na primjeru $\alpha = \sqrt{2}$!

Pokažimo to na primjeru $\alpha = \sqrt{2}$!

$$\alpha = \sqrt{2}, \qquad a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}, \qquad a_1 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$$

Pokažimo to na primjeru $\alpha = \sqrt{2}$!

$$\alpha = \sqrt{2}, \qquad a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}, \qquad a_1 = \lfloor \sqrt{2} + 1 \rfloor = 2$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$$

Zbog algoritma je jasno da će se dalje stalno ponavljati isto, pa zaključujemo: $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1; \overline{2}]$

Lagrange

Neka je α kvadratna iracionalnost, tj. neka je oblika $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a, c \in \mathbb{Z}$, $b > 1$, $b \neq \blacksquare$. Tada α periodični verižni razlomak.

Euler

Ako je α periodični verižni razlomak, onda je α kvadratna iracionalnost.

Zadatak!

Izaberi neki korijen po volji (nemojte preveliki!) i razvij ga u verižni razlomak!

Može li ovo lakše?

Može li ovo lakše?

Može! Ali onda broj mora ispuniti neki uvjet...

Može li ovo lakše?

Može! Ali onda broj mora ispuniti neki uvjet...

Uvjet za jednostavniji algoritam: $c|(b - a^2)$

Može li ovo lakše?

Može! Ali onda broj mora ispuniti neki uvjet...

Uvjet za jednostavniji algoritam: $c|(b-a^2)$

Možemo algoritam koristiti i za one koji ne zadovoljavaju taj uvjet, ali prije moramo broj proširiti brojem c. Na taj način dobijemo broj $\frac{ac+\sqrt{bc^2}}{c^2}$ koji zadovoljava dani uvjet!

Algoritam ćemo primjenjivati tablično:

Algoritam ćemo primjenjivati tablično:

$$s_0 = a, \qquad d = b, \qquad t_0 = c, \qquad a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$$

$$s_k = a_{k-1} \cdot t_{k-1} - s_{k-1}$$

$$t_k = \frac{d - s_k^2}{t_{k-1}}$$

$$a_k = \left\lfloor \frac{s_k + \lfloor d \rfloor}{t_k} \right\rfloor$$

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1
3	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	1

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1
3	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	1
4	1	3	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	1

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1
3	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	1
4	1	3	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	1
5	2	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{1}$	4

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1
3	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	1
4	1	3	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	1
5	2	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{1}$	4
6	2	3		

Razvijmo tablično $\frac{5+\sqrt{7}}{6}$ u verižni razlomak.
Stavimo $s_0 = 5, d = 7, t_0 = 6$ te izračunamo $a_0 = 1$. Nastavljamo tablicom.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	5	6	$\frac{5+\sqrt{7}}{6}$	1
1	1	1	$\frac{1+\sqrt{7}}{1}$	3
2	2	3	$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$	1
3	1	2	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	1
4	1	3	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	1
5	2	1	$\frac{2+\sqrt{7}}{1}$	4
6	2	3		

$$\frac{5+\sqrt{7}}{6} = [1; 3, \overline{1, 1, 1, 4}]$$

Možemo li iz razvoja u verižni razlomak zaključiti o kojem se iracionalnom broju radi?

Možemo li iz razvoja u verižni razlomak zaključiti o kojem se iracionalnom broju radi?

Možemo

Možemo li iz razvoja u verižni razlomak zaključiti o kojem se iracionalnom broju radi?

Možemo, ali je postupak vrlo kompliciran.

Možemo li iz razvoja u verižni razlomak zaključiti o kojem se iracionalnom broju radi?

Možemo, ali je postupak vrlo kompliciran.

Umjesto toga ograničit ćemo se na određivanje neke dobre aproksimacije (što god to *dobre* značilo!).

Možemo li iz razvoja u verižni razlomak zaključiti o kojem se iracionalnom broju radi?

Možemo, ali je postupak vrlo kompliciran.

Umjesto toga ograničit ćemo se na određivanje neke dobre aproksimacije (što god to *dobre* značilo!).

Pri određivanju aproksimacije koristit ćemo se istim algoritmom kao i u slučaju određivanja racionalnog broja iz verižnog razlomka.

Na primjer, odredi sedmu konvergentu u razvoju $[3; 4, \overline{1, 2}]$ te kalkulatorom odredi točnost aproksimacije (radi se o broju $\frac{21-\sqrt{3}}{6}$).

Na primjer, odredi sedmu konvergentu u razvoju $[3; 4, \overline{1, 2}]$ te kalkulatorom odredi točnost aproksimacije (radi se o broju $\frac{21-\sqrt{3}}{6}$).

Vodimo računa: $[3; 4, \overline{1, 2}] = [3; 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$

Na primjer, odredi sedmu konvergentu u razvoju $[3; 4, \overline{1, 2}]$ te kalkulatorom odredi točnost aproksimacije (radi se o broju $\frac{21-\sqrt{3}}{6}$).

Vodimo računa: $[3; 4, \overline{1, 2}] = [3; 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n			3	4	1	2	1	2	1	2
p_k	0	1	3	13	16	45	61	167	228	623
q_k	1	0	1	4	5	14	19	52	71	194

Na primjer, odredi sedmu konvergentu u razvoju $[3; 4, \overline{1, 2}]$ te kalkulatorom odredi točnost aproksimacije (radi se o broju $\frac{21-\sqrt{3}}{6}$).

Vodimo računa: $[3; 4, \overline{1, 2}] = [3; 4, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n			3	4	1	2	1	2	1	2
p_k	0	1	3	13	16	45	61	167	228	623
q_k	1	0	1	4	5	14	19	52	71	194

Dakle, sedma konvergenta iznosi $\frac{623}{194} \approx 3.211340206185567$ dok je vrijednost danog broja $\frac{21-\sqrt{3}}{6} \approx 3.211324865405187$. Primijetimo da sedma konvergenta daje točnost na četiri decimale!

Zadatak!

Izračunaj osmu konvergentu u razvoju verižnog razlomka $[2, \overline{4, 3}]$ te odredi točnost te aproksimacije (radi se o broju $\frac{1+\sqrt{12}}{2}$).

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

anavolimilovana

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

anavolimilovana

Riječ sa svojstvom da se jednako čita i s lijeva na desno i s desna na lijevo naziva se palindrom.

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

anavolimilovana

Riječ sa svojstvom da se jednako čita i s lijeva na desno i s desna na lijevo naziva se palindrom.

I u periodičnim verižnim razlomcima postoje palindromi!

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

anavolimilovana

Riječ sa svojstvom da se jednako čita i s lijeva na desno i s desna na lijevo naziva se palindrom.

I u periodičnim verižnim razlomcima postoje palindromi!

$$\alpha = [a_0; \overline{\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1}_{\text{palindrom}}, 2a_0}]$$

Pročitaj sljedeću riječ naopako:

anavolimilovana

Riječ sa svojstvom da se jednako čita i s lijeva na desno i s desna na lijevo naziva se palindrom.

I u periodičnim verižnim razlomcima postoje palindromi!

$$\alpha = [a_0; \overline{\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1}_{\text{palindrom}}, 2a_0}]$$

Ovi su nam posebno zanimljivi jer su oni oblika $\frac{\sqrt{b}}{c}$, odnosno oni predstavljaju poseban slučaj kvadratne iracionalnosti kada je $a = 0$.

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7
5	18	28	$\frac{18+\sqrt{464}}{28}$	1

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7
5	18	28	$\frac{18+\sqrt{464}}{28}$	1
5	10	13	$\frac{10+\sqrt{464}}{13}$	2

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7
5	18	28	$\frac{18+\sqrt{464}}{28}$	1
5	10	13	$\frac{10+\sqrt{464}}{13}$	2
5	16	16	$\frac{16+\sqrt{464}}{16}$	2

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7
5	18	28	$\frac{18+\sqrt{464}}{28}$	1
5	10	13	$\frac{10+\sqrt{464}}{13}$	2
5	16	16	$\frac{16+\sqrt{464}}{16}$	2
6	16	13		

Pokažimo na primjeru $\frac{\sqrt{29}}{4}$, odnosno $\frac{\sqrt{464}}{16}$.

k	s_k	t_k	α_k	a_k
0	0	16	$\frac{\sqrt{464}}{16}$	1
1	16	13	$\frac{16+\sqrt{464}}{13}$	2
2	10	28	$\frac{10+\sqrt{464}}{28}$	1
3	18	5	$\frac{18+\sqrt{464}}{5}$	7
4	17	35	$\frac{17+\sqrt{464}}{35}$	1
5	18	4	$\frac{18+\sqrt{464}}{4}$	9
5	18	35	$\frac{18+\sqrt{464}}{35}$	1
5	17	5	$\frac{17+\sqrt{464}}{5}$	7
5	18	28	$\frac{18+\sqrt{464}}{28}$	1
5	10	13	$\frac{10+\sqrt{464}}{13}$	2
5	16	16	$\frac{16+\sqrt{464}}{16}$	2
6	16	13		

$$\frac{\sqrt{29}}{4} = [1; \overline{\underbrace{2,1,7,1,9,1,7,1,2}_{\text{palindrom}},2}]$$

A sada VI nastupate!

Xie xie!