

Zapis realnih i racionalnih brojeva u računalu

Josip Kličinović

Opća gimnazija
Zagreb

Zagreb, studeni 2008.

- Što su racionalni, a što realni brojevi?

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom
 - sa **pomičnim** zarezom

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom
 - sa **pomičnim** zarezom
- prikaz sa nepomičnim zarezom nije praktičan!

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom
 - sa **pomičnim** zarezom
- prikaz sa nepomičnim zarezom nije praktičan!
 - koristi fiksni dio za cijeli dio i fiksni dio sa decimalni dio broja

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom
 - sa **pomičnim** zarezom
- prikaz sa nepomičnim zarezom nije praktičan!
 - koristi fiksni dio za cijeli dio i fiksni dio sa decimalni dio broja
 - zbog toga je raspon mogućih brojeva poprilično malen

- Što su racionalni, a što realni brojevi?
- Oni se u računalu mogu prikazati na dva načina:
 - sa **nepomičnim** zarezom
 - sa **pomičnim** zarezom
- prikaz sa nepomičnim zarezom nije praktičan!
 - koristi fiksni dio za cijeli dio i fiksni dio sa decimalni dio broja
 - zbog toga je raspon mogućih brojeva poprilično malen
- u široj je uporabi prikaz sa pomičnim zarezom (standard IEEE 754)

- brojeve sa pomičnim zarezom mogu se prikazati na 2 načina

- brojeve sa pomičnim zarezom mogu se prikazati na 2 načina
 - jednostrukom preciznošću (koristi 32 bita)

- brojeve sa pomičnim zarezom mogu se prikazati na 2 načina
 - jednostrukom preciznošću (koristi 32 bita)
 - dvostrukom preciznošću (koristi 64 bita)

Prikaz jednostrukom preciznošću

- koriste se 32 bita

Prikaz jednostrukom preciznošću

- koriste se 32 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)

Prikaz jednostrukom preciznošću

- koriste se 32 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 8 bitova se koristi za prikaz karakteristike

Prikaz jednostrukom preciznošću

- koriste se 32 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 8 bitova se koristi za prikaz karakteristike
- zadnjih 23 bita se koristi za prikaz mantise

Prikaz jednostrukom preciznošću

- koriste se 32 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 8 bitova se koristi za prikaz karakteristike
- zadnjih 23 bita se koristi za prikaz mantise



Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa
- normalizacijom svakom broja se postiže oblik **1.M**, pa se vodeća jedinica ne prikazuje u računalu, te je nazivamo *skriveni bit*

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa
- normalizacijom svakom broja se postiže oblik **1.M**, pa se vodeća jedinica ne prikazuje u računalu, te je nazivamo *skriveni bit*
- broj $K = be + 127$ je karakteristika, a $be =$ binarni eksponent

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa
- normalizacijom svakom broja se postiže oblik **1.M**, pa se vodeća jedinica ne prikazuje u računalu, te je nazivamo *skriveni bit*
- broj $K = be + 127$ je karakteristika, a $be =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 127 kako bi izbjegli negativni eksponent

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa
- normalizacijom svakom broja se postiže oblik **1.M**, pa se vodeća jedinica ne prikazuje u računalu, te je nazivamo *skriveni bit*
- broj $K = be + 127$ je karakteristika, a $be =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 127 kako bi izbjegli negativni eksponent
- Najmanji / Najveći broj

Prikaz jednostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran!
- normalizirani broj ima zapis $1.M \cdot 2^{be}$
- npr. broj 101.1001_2 u normaliziranom obliku je $1.011001 \cdot 2^2$
- broj M je mantisa
- normalizacijom svakom broja se postiže oblik **1.M**, pa se vodeća jedinica ne prikazuje u računalu, te je nazivamo *skriveni bit*
- broj $K = be + 127$ je karakteristika, a $be =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 127 kako bi izbjegli negativni eksponent
- Najmanji / Najveći broj
- $1.401298464324817 \cdot 10^{-45} / 3.402823669209 \cdot 10^{38}$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:

Prikaz jednostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0

Prikaz jednostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0
- ako je $K = 255$ i svi brojevi mantise su nula, tada se radi o $-\infty$, odnosno $+\infty$, ovisno o predznaku P

Prikaz jednostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0
- ako je $K = 255$ i svi brojevi mantise su nula, tada se radi o $-\infty$, odnosno $+\infty$, ovisno o predznaku P
- ako je $K = 255$, a neki bit mantise **nije** 0, onda se radi o NaN (Not A Number) = Nije Broj

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*
- $5.75_{10} = 101.11_2 = 1.0111_2 \cdot 2^2$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*
- $5.75_{10} = 101.11_2 = 1.0111_2 \cdot 2^2$
- $P = 0$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*
- $5.75_{10} = 101.11_2 = 1.0111_2 \cdot 2^2$
- $P = 0$
- $K = 2 + 127 = 129_{10} = 1000001_2$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*
- $5.75_{10} = 101.11_2 = 1.0111_2 \cdot 2^2$
- $P = 0$
- $K = 2 + 127 = 129_{10} = 1000001_2$
- $M = 0111 =$ (nadopunimo nulama na kraju da bismo imali 23 znamenke!) $= 0111000000000000000000$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 1:*
- $5.75_{10} = 101.11_2 = 1.0111_2 \cdot 2^2$
- $P = 0$
- $K = 2 + 127 = 129_{10} = 1000001_2$
- $M = 0111 =$ (nadopunimo nulama na kraju da bismo imali 23 znamenke!) $= 01110000000000000000000$
- | | | |
|---|---------|-------------------------|
| 0 | 1000001 | 01110000000000000000000 |
|---|---------|-------------------------|

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*

- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*
- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|
- $P = 1$, pa znamo da se radi o negativnom broju

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*
- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|
- $P = 1$, pa znamo da se radi o negativnom broju
- $K = 10000011_2 = 131_{10}; be = K - 127 = 131 - 127 = 4$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*

- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|

- $P = 1$, pa znamo da se radi o negativnom broju

- $K = 10000011_2 = 131_{10}; be = K - 127 = 131 - 127 = 4$

- $M = 110100100000000000000000 = 1101001_2$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*
- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|
- $P = 1$, pa znamo da se radi o negativnom broju
- $K = 10000011_2 = 131_{10}; be = K - 127 = 131 - 127 = 4$
- $M = 110100100000000000000000 = 1101001_2$
- $1.1101001 \cdot 2^4 = 11101.001_2 = 29.125_{10}$

Prikaz jednostrukom preciznošću

- *Primjer 2:*
- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000011 | 110100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|
- $P = 1$, pa znamo da se radi o negativnom broju
- $K = 10000011_2 = 131_{10}; be = K - 127 = 131 - 127 = 4$
- $M = 110100100000000000000000 = 1101001_2$
- $1.1101001 \cdot 2^4 = 11101.001_2 = 29.125_{10}$
- Ali $P = 1$, pa je traženi broj -29.125_{10}

Prikaz dvostrukom preciznošću

- koriste se 64 bita

Prikaz dvostrukom preciznošću

- koriste se 64 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)

Prikaz dvostrukom preciznošću

- koriste se 64 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 11 bitova se koristi za prikaz karakteristike

Prikaz dvostrukom preciznošću

- koriste se 64 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 11 bitova se koristi za prikaz karakteristike
- zadnjih 52 bita se koristi za prikaz mantise

Prikaz dvostrukom preciznošću

- koriste se 64 bita
- najviši bit se koristi za predznak (0 ako je broj pozitivan, 1 ako je negativan)
- daljnjih 11 bitova se koristi za prikaz karakteristike
- zadnjih 52 bita se koristi za prikaz mantise



Prikaz dvostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran (kao i kod prikaza jednostruke preciznosti!)

Prikaz dvostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran (kao i kod prikaza jednostruke preciznosti!)
- broj $K = b_e + 1023$ je karakteristika, a $b_e =$ binarni eksponent

Prikaz dvostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran (kao i kod prikaza jednostruke preciznosti!)
- broj $K = b_e + 1023$ je karakteristika, a $b_e =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 1023 kako bi izbjegli negativni eksponent

Prikaz dvostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran (kao i kod prikaza jednostruke preciznosti!)
- broj $K = b_e + 1023$ je karakteristika, a $b_e =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 1023 kako bi izbjegli negativni eksponent
- Najmanji / Najveći broj

Prikaz dvostrukom preciznošću

- broj mora biti normaliziran (kao i kod prikaza jednostruke preciznosti!)
- broj $K = be + 1023$ je karakteristika, a $be =$ binarni eksponent
- zbrajamo sa 1023 kako bi izbjegli negativni eksponent
- Najmanji / Najveći broj
- $4.9406 \cdot 10^{-324} / 1.797693134862316 \cdot 10^{308}$

Prikaz dvostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:

Prikaz dvostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0

Prikaz dvostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0
- ako je $K = 2047$ i svi brojevi mantise su nula, tada se radi o $-\infty$, odnosno $+\infty$, ovisno o predznaku P

Prikaz dvostrukom preciznošću

- Specijalni slučajevi:
- ako je $K = 0$ i svi bitovi mantise su nula, tada se radi o broju 0
- ako je $K = 2047$ i svi brojevi mantise su nula, tada se radi o $-\infty$, odnosno $+\infty$, ovisno o predznaku P
- ako je $K = 2047$, a neki bit mantise **nije** 0, onda se radi o NaN (Not A Number) = Nije Broj

...malo o točnosti...

- Koji je bolji od dva prikaza koja smo obradili?

...malo o točnosti...

- Koji je bolji od dva prikaza koja smo obradili?
- Naravno da je točniji prikaz sa dvostrukom preciznošću (to mu i ime kaže) :)

...malo o točnosti...

- Koji je bolji od dva prikaza koja smo obradili?
- Naravno da je točniji prikaz sa dvostrukom preciznošću (to mu i ime kaže) :)
- Manje mjesta zauzima prikaz jednostruke preciznosti: 32 bita, odnosno 4 bajta

...malo o točnosti...

- Koji je bolji od dva prikaza koja smo obradili?
- Naravno da je točniji prikaz sa dvostrukom preciznošću (to mu i ime kaže) :)
- Manje mjesta zauzima prikaz jednostruke preciznosti: 32 bita, odnosno 4 bajta
- Prikaz dvostruke preciznosti zauzima 64 bita, odnosno 8 bajta

Zadatci:

- Prikaži slijedeće brojeve u zapisu jednostruke preciznosti:
- 1. 0.375_{10}
- 2. 12.125_{10}
- 3. -32.21875_{10}
-
- Broj je zapisan jednostrukom preciznošću. Koji je to broj?
- | | | |
|---|----------|--------------------------|
| 1 | 10000101 | 010100100000000000000000 |
|---|----------|--------------------------|