Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog

Diplomski rad

Josip Kličinović

PMF-Matematički odjel
Sveučilište u Zagrebu

Zagreb, srpanj 2009.

Sadržaj

Prostor Minkowskog (1/14)

Definicija prostora Minkowskog

Prostor Minkowskog

Prostor definiran kao uobičajeni trodimenzionalni realni vektorski prostor koji se sastoji od uređenih trojki $\{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ na kojemu je definirana operacija (pseudoskalarni produkt)

$$< x, y >_1 = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

naziva se prostor Minkowskog ili Lorentzov prostor i označava se sa $\mathbb{R}^3_1$.

Prostor Minkowskog (2/14)

Definicija prostora Minkowskog

Svojstva pseudonorme

- komutativnost: $< x, y >_1 = < y, x >_1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3_1$
- kvaziasocijativnost: $< \alpha x, y >_1 = \alpha < x, y >_1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^3_1$
- distributivnost zbranjanja:
  $< x + y, z >_1 = < x, z >_1 + < y, z >_1 \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3_1$
- nedegeneriranost: ako vrijedi $< x, y >_1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3_1$, onda je $y = 0$

Važno je primjetiti da ovako definirana operacija nije uvijek pozitivno definitna, što nas vodi do definiranja različitih vrsta vektora!

Prostor Minkowskog (3/14)

Definicija prostora Minkowskog

Vrste vektora

- **Prostorni vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 > 0$
- **Vremenski vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 < 0$
- **Svjetlosni (izotropni ili nul) vektor** je vektor x za kojega vrijedi $< x, x >_1 = 0$

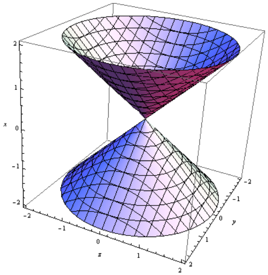
Vrste vektora - alternativna definicija

- **Prostorni vektor** je vektor x za kojega vrijedi $x_1^2 < x_2^2 + x_3^2$
- **Vremenski vektor** je vektor x za kojega vrijedi $x_1^2 > x_2^2 + x_3^2$
- **Svjetlosni vektor** je vektor x za kojega vrijedi $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$

Prostor Minkowskog (4/14)

Definicija prostora Minkowskog

Skup svih svjetlosnih vektora u prostoru Minkowskog naziva se *svjetlosni stožac* i predstavljen je implicitnom jednadžbom $\{(x, y, z) | x^2 = y^2 + z^2, x \neq 0\}$.



Eksterior svjetlosnog stošca sadrži sve prostorne vektore.

Interior svjetlosnog stošca sadrži sve vremenske vektore.

Prostor Minkowskog (5/14)

Definicija prostora Minkowskog

Vektorski potprostor u $\mathbb{R}^3_1$

Neka je V vektorski potprostor od $\mathbb{R}^3_1$. Tada V nazivamo:

- **vremenskim** ako i samo ako V sadrži vremenski vektor
- **prostorni** ako i samo ako V sadrži prostorni vektor
- **svjetlosni** ako i samo ako V sadrži svjetlosni vektor

Okomiti vektori

Za vektore $x, y \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da su *ortogonalni* ili *okomiti* ako vrijedi $< x, y >_1 = 0$.

Primijetimo da je svjetlosni vektor okomit na samoga sebe.

Teorem o okomitosti

Neka su x i y dva ne-nul okomita vektora u $\mathbb{R}^3_1$. Ako je x vremenski, onda je y prostorni.

Prostor Minkowskog (7/14)

Pseudonorma vektora

Pitanje: Kako u prostoru Minkowskog mjeriti duljinu vektora?

Podsjetimo se: u euklidskom prostoru duljinu vektora mjerimo *normom* $||x|| := \sqrt{< x, x >}$.

Problem: U prostoru Minkowskog pseudonorma vektora općenito nije pozitivno definitna.

Rješenje: Duljinu vektora u prostoru Minkowskog mjerimo pseudonormom vektora $||x||_1 := \sqrt{| < x, x >_1 |}$

Svojstva pseudonorme vektora

- *pozitivna definitnost* $\|x\|_1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3_1$, što slijedi izravno iz definicije
- *homogenost* $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \cdot \|x\|_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^3_1$

U prostoru Minkowskog općenito ne vrijedi $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow x = 0$ i nejednakost trokuta!

Propozicija o obrnutoj nejednakosti trokuta

Neka su x i y dva vremenska vektora. Vrijedi $\|x + y\|_1 \geq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Jedinični vektor

Za vektor $x \in \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je *jediničan* ako vrijedi $| < x, x >_1 | = 1$.

Propozicija - C-S-B nejednakost

Neka su x i y linearno nezavisni prostorni vektori u $\mathbb{R}^3_1$ i neka je V dvodimenzionalni vektorski potprostor razapet vektorima x i y. Vrijedi:

- $| < x, y >_1 | < \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je V prostorni
- $| < x, y >_1 | = \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je V svjetlosni
- $| < x, y >_1 | > \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je V vremenski

Vektorski produkt

Vektorski produkt u $\mathbb{R}^3_1$ je funkcija $\times_1 : \mathbb{R}^3_1 \times \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$ koja paru vektora $a, b \in \mathbb{R}^3_1$ pridružuje vektor $a \times_1 b \in \mathbb{R}^3_1$ određen zahtjevom

$$< a \times_1 b, c >_1 = det(a, b, c), \forall c \in \mathbb{R}^3_1.$$

Vektorski produkt vektora a i b možemo računati na sljedeći način

$$a \times_1 b = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Iz definicije vektorskog produkta i okomitosti vektora slijedi da je vektor $a \times_1 b$ okomit na vektor a i b.

Lagrangeov identitet u prostoru Minkowskog

$$< a \times_1 b, a \times_1 b >_1 = < a, b >_1^2 - < a, a >_1 \cdot < b, b >_1$$

Propozicija

Neka je $\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ i neka je $< a, a >_1 = \varepsilon, < b, b >_1 = \eta, a \perp b$. Tada je $< c, c >_1 = -\varepsilon\eta$, gdje je $c = a \times_1 b$.

Prostor Minkowskog (12/14)

Vektorski produkt

Propozicija - C-S-B i vektorski produkt

Ako su x i y dva prostorna vektora u $\mathbb{R}^3_1$, tada vrijedi

- $| < x, y >_1 | < \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je vektor $x \times_1 y$ vremenski
- $| < x, y >_1 | = \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je vektor $x \times_1 y$ svjetlosni
- $| < x, y >_1 | > \|x\|_1 \cdot \|y\|_1$ ako i samo ako je vektor $x \times_1 y$ prostorni

Prostor Minkowskog (13/14)

Baza prostora $\mathbb{R}^3_1$

Definirajmo vektore e_1, e_2, e_3.

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0) \\
e_2 &= (0, 1, 0) \\
e_3 &= (0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Teorem

Ortonormirani skup $\{e_1, e_2, e_3\}$ čini jednu ortonormiranu bazu.

Primjetimo da se baza prostora $\mathbb{R}^3_1$ sastoji od jednog vremenskog i dvaju prostorna vektora!

Prostor Minkowskog (14/14)

Baza prostora $\mathbb{R}^3_1$

Svaki vektor iz $\mathbb{R}^3_1$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora iz baze na slijedeći način:

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3,$$

gdje je

$$\alpha = - < x, e_1 >_1$$

$$\beta =< x, e_2 >_1$$

$$\gamma =< x, e_3 >_1$$

Krivulje u prostoru Minkowskog (1/10)

Definicija i reparametrizacija

Definicija krivulje

Krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ je glatko preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ (odnosno: c je klase C^∞ na I), gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval.

Regularna krivulja

Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je regularna ako je $\dot{c}(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Vrste krivulja

Regularna krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ naziva se

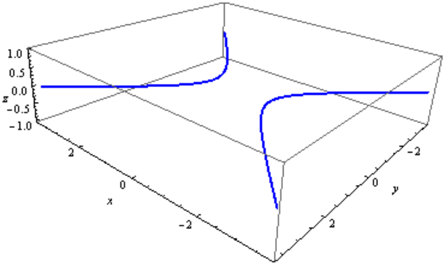
$$\begin{cases} \textit{prostorna krivulja} & \text{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 > 0 \text{ svugdje} \\ \textit{vremenska krivulja} & \text{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 < 0 \text{ svugdje} \\ \textit{svjetlosna ili izotropna ili nul-krivulja} & \text{ako je } < \dot{c}, \dot{c} >_1 = 0 \text{ svugdje} \end{cases}$$

Primjer 1: Hiperbola parametrizacije $c(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$.

$$\dot{c}(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$$

$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -\sinh^2 t + \cosh^2 t = 1$$

Pokazali smo da je ova hiperbola prostorna krivulja.



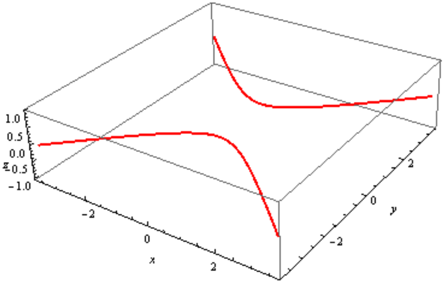
Slika: Prostorna hiperbola

Primjer 2: Hiperbola parametrizacije $c(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$.

$$\dot{c} = (\cosh t, \sinh t, 0)$$

$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$$

Pokazali smo da je ova hiperbola vremenska krivulja.



Slika: Vremenska hiperbola

Krivulje u prostoru Minkowskog (4/10)

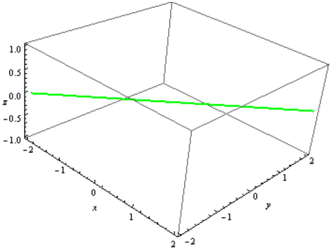
Definicija i reparametrizacija

Primjer 3: Pravac parametrizacije $c(t) = (t, t, 0)$.

$$\dot{c} = (1, 1, 0)$$

$$< \dot{c}, \dot{c} >_1 = -1 + 1 = 0$$

Pokazali smo da je ovaj pravac svjetlosna (izotropna) krivulja.



Slika: Svjetlosni pravac

Krivulje u prostoru Minkowskog (5/10)

Definicija i reparametrizacija

Definicija reparametrizacije

Kažemo da je krivulja $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1, \widetilde{I} \subseteq \mathbb{R}$, *reparametrizacija krivulje* $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ ako postoji glatka bijekcija $\varphi : \widetilde{I} \to I$ kojoj je inverz gladak (tj. funkcija je glatki difeomorfizam) i za koju vrijedi $\widetilde{c}(\widetilde{t}) = c(\varphi(\widetilde{t})) = c(t)$.

Definicija krivulje PDL

Kažemo da je krivulja c parametrizirana duljinom lûka (PDL) ako vrijedi $| < \dot{c}, \dot{c} >_1 | = 1$.

Napomena: Funkcija $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\dot{c}(t)\|_1 \, dt$ naziva se *funkcija duljine lûka*.

Lema

Svaka se regularna krivulja $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ može reparametrizirati duljinom lûka. Preciznije:

- ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna krivulja koja je prostorna, tada postoji reparametrizacija $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1$ od c koja je također prostorna, odnosno $< \dot{\widetilde{c}}(s), \dot{\widetilde{c}}(s) >_1 = 1, \forall s \in \widetilde{I}$
- ako je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna krivulja koja je vremenska, tada postoji reparametrizacija $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^3_1$ od c koja je također vremenska, odnosno $< \dot{\widetilde{c}}(s), \dot{\widetilde{c}}(s) >_1 = -1, \forall s \in \widetilde{I}$

Definicija Frenetovog trobrida

Neka je c prostorna ili vremenska krivulja u $\mathbb{R}^3_1$ koja je parametrizirana duljinom luka i koja zadovoljava uvjet $< \ddot{c}, \ddot{c} >_1 \neq 0$. Frenetov trobrid ili trobrid pratilac je uređena trojka $\{T, N, B\}$, gdje su elementi T, N, B određeni sa:

$$T(s) = \dot{c}(s)$$

$$N(s) = \frac{\ddot{c}(s)}{\sqrt{| < \ddot{c}(s), \ddot{c}(s) >_1 |}}$$

$$B(s) = T(s) \times_1 N(s)$$

Krivulje u prostoru Minkowskog (8/10)

Frenetov trobrid i Frenetove forumule

Frenetove formule

Za polja T, N, B (definirana kao u prethodnoj definiciji) vrijedi:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)\eta N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)\varepsilon T(s) - \tau(s)\varepsilon\eta B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)\eta N(s), \end{aligned}$$

pri čemu su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ fleksija i torzija krivulje, $|\eta| = | < N, N >_1 | = 1$, a $|\varepsilon| = | < T, T >_1 | = 1$.

Primijetimo da navedene formule formalno možemo zapisati u sljedećoj formi:

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\varepsilon & 0 & -\tau\varepsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Krivulje u prostoru Minkowskog (8/10)

Fleksija krivulje

Iz Frenetovih formula i defincije Frenetovog trobrida možemo zaključiti sljedeće:

$$
\begin{aligned}
T' &= \kappa\eta N \\
\ddot{c} &= \kappa\eta \frac{\ddot{c}}{\sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |}} \\
\kappa\eta &= \sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |} \\
\kappa &= \eta \sqrt{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |} = \eta \|\ddot{c}\|_1
\end{aligned}
$$

Fleksija mjeri odstupanje krivulje od pravca u nekoj maloj okolini točke P, odnosno, fleskija mjeri brzinu promjene jediničnog tangencijalnog polja.

Znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \dot{c} &= T \\ \ddot{c} &= T' = \kappa\eta N \\ \dddot{c} &= -\varepsilon\kappa^2\eta T - \varepsilon\kappa\tau B \end{aligned}$$

$$det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}) = \kappa^2\tau$$

Iz čega slijedi

$$\tau = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{\kappa^2} = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{| < \ddot{c}, \ddot{c} >_1 |}.$$

Torzijom se mjeri odstupanje krivulje od ravninske krivulje.

Definicija ravninske krivulje

Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ kažemo da je *ravninska krivulja* ako postoji ravnina $\pi \subseteq \mathbb{R}^3_1$ takva da je $c(I) \subseteq \pi$.

Propozicija

Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3_1$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka bez singularnih točaka 1. reda. Krivulja je ravninska $\Leftrightarrow \tau = 0$.

Plohe u prostoru Minkowskog (1/18)

Definicija plohe

Definicija plohe

Podskup $S \subset \mathbb{R}^3_1$ je *ploha* ako za svaku točku $P \in S$ postoji otvorena okolina $V \in \mathbb{R}^3_1$ i preslikavanje $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ s otvorenog skupa $U \in \mathbb{R}^2_1$ koje je

(i) neprekidna bijekcija, kao što je i njegov inverz (tj. preslikavanje je homeomorfizam)

(ii) neprekidno derivabilno (tj. glatka funkcija)

Regularnost plohe

Ako je diferencijal preslikavanja $\mathbf{x}$ injektivan, za plohu kažemo da je regularna.
Odnosno, ploha je regularna ako i samo ako su vektori $\mathbf{x}_u := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$; $\mathbf{x}_v := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ linearno nezavisno, tj. ako i samo ako vrijedi $\mathbf{x}_u \times_1 \mathbf{x}_v \neq 0$.

Plohe u prostoru Minkowskog (2/18)

Definicija plohe

Propozicija - implicitna jednadžba plohe

Skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : g(x, y, z) = c\}$ gdje je $c \in \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^3_1$, $g : S \to \mathbb{R}$ glatka funkcija nazivamo *plohom* ako je funkcija g takva da je $\nabla g \neq 0, \forall P \in S$.

Napomena: Gradijent funkcije g je definiran na sljedeći način: $\nabla g := (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$.

Propozicija - eksplicitna jednadžba plohe

Skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : z = f(x, y)\}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2_1$ otvoren i povezan, je regularna ploha.

Jednostavna ploha

Ploha koju je moguće pokriti samo jednom kartom naziva se *jednostavna ploha*.

Plohe u prostoru Minkowskog (3/18)

Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina

Tangencijalna ravnina T_PS plohe S u točki P je ravnina razapeta tangentama svih krivulja koje leže na plohi S, a prolaze točkom P.

Pitanje: koliko krivulja leži na plohi S i prolaze točkom P?

Odgovor: beskonačno mnogo!

Problem: kako naći sve te krivulju i sve te tangente?

Rješenje: promatrajmo samo dvije krivulje, u-krivulju i v-krivulju i razapnimo ravninu tangentama tih krivulja u točki P

Jasno je da je dimenzija tangencijalne ravnine $dim T_PS = 2$.

Plohe u prostoru Minkowskog (4/18)

Tangencijalna ravnina

Ako je ploha zadana parametarskom jednadžbom $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, onda je jednadžba tangencijalne ravnine u točki (x_0, y_0, z_0) dana sa

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0 \end{vmatrix} = 0$$

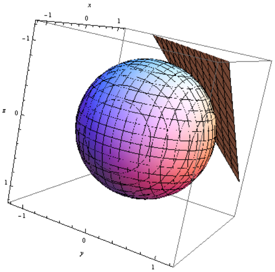
Ako je ploha zadana implicitnom jednadžbom $F(x, y, z) = c$, onda je jednadžba tangencijalne ravnine u točki (x_0, y_0, z_0) dana sa

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

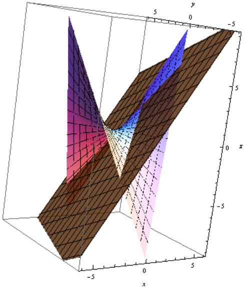
Plohe u prostoru Minkowskog (5/18)

Tangencijalna ravnina

Sfera radijusa 1 s centrom u ishodištu ima implicitnu jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tangencijalna ravnina u točki $P = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ima jednadžbu $x + y + z = \sqrt{3}$.



Hiperbolički paraboloid ima parametarsku jednadžbu $(u + v, u - v, uv)$. Tangencijalna ravnina u točki $P(u = 2, v = 1)$ ima jednadžbu $3x - y - 2z = 4$.



Plohe u prostoru Minkowskog (6/18)

Prva fundamentalna forma

Promotrimo bilo koja dva vektora $X, Y \in T_P S$. Oni su oblika

$$X = a \cdot \mathbf{x}_u(u, v) + b \cdot \mathbf{x}_v(u, v)$$

$$Y = c \cdot \mathbf{x}_u(u, v) + d \cdot \mathbf{x}_v(u, v).$$

Prvu fundamentalnu formu definiramo analogno kao u euklidskom prostoru.

Prva fundamentalna forma

Prva fundamentalna forma je simetrično bilinearno preslikavanje $\mathbf{I} : T_P S \times T_P S \to \mathbb{R}$. Odnosno, to je restrikcija danog pseudoskalarnog produkta na tangencijalnu ravninu $T_P S$ $\mathbf{I}(X, Y) := < X, Y >_1$.

Gaussove (fundamentalne) veličine prvog reda

Neka je ploha M zadana parametarski sa $\mathbf{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Tada za plohu M definiramo funkcije $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$E := < \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u >_1 = -x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$
$$F := < \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v >_1 = -x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$
$$G := < \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v >_1 = -x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

Prvu fundamentalnu formu možemo opisati sljedećom simetričnom matricom:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Plohe u prostoru Minkowskog (8/18)

Prva fundamentalna forma

Kvadratna forma

Kvadratna forma je

- *pozitivno definitna* ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti matrice strogo pozitivne
- *indefinitna* ako i samo ako postoje barem dvije svojstvene vrijednosti matrice različite od nula i suprotnog predznaka.

Vrste ploha

Ploha S je:

- *prostorna* ako joj je prva fundamentalna forma pozitivno definitna
- *vremenska* ako joj je prva fundamentalna forma indefinitna
- *izotropna* ako je rang njene prve fundamentalne forme 1

Plohe u prostoru Minkowskog (9/18)

Prva fundamentalna forma

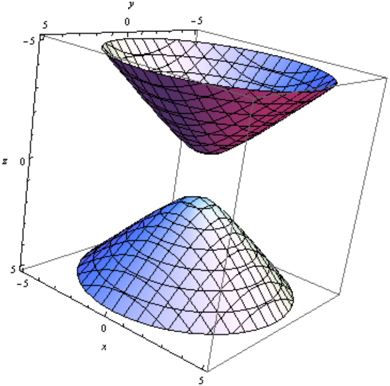
Dvoplošni hiperboloid

$\mathbf{x}(u, v) =$
$(\cosh u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$

$E = 1$
$F = 0$
$G = \sinh^2 u$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 u \end{pmatrix}$$

Prostorna ploha!



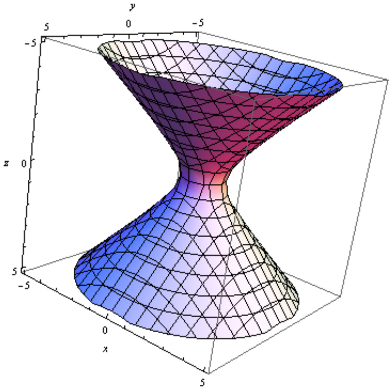
Jednoplošni hiperboloid

$\mathbf{x}(u, v) =$
$(\sinh u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v)$

$E = -1$
$F = 0$
$G = \cosh^2 u$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}$$

Vremenska ploha!



Plohe u prostoru Minkowskog (11/18)

Prva fundamentalna forma

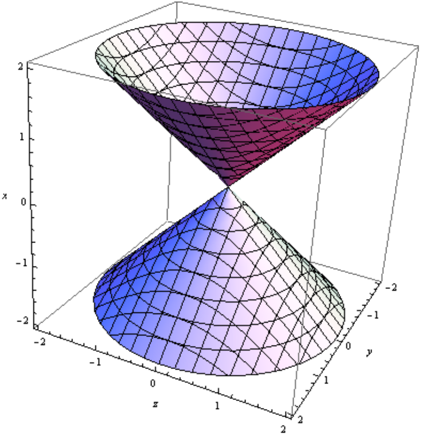
Svjetlosni stožac

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, \pm\sqrt{u^2+v^2})$$

$$E = -1 + \frac{u^2}{u^2-v^2}$$
$$F = \frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}$$
$$G = 1 + \frac{v^2}{u^2-v^2}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{u^2}{u^2-v^2} & \frac{uv}{u^2-v^2} \\ \frac{uv}{u^2-v^2} & 1 + \frac{v^2}{u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

Rang matrice = 1.
Svjetlosna ploha!



Plohe u prostoru Minkowskog (12/18)

Druga fundamentalna forma

Gaussovo preslikavanje

Gaussovo preslikavanje za prostornu plohu (kojoj je vektor normale vremenski vektor) je oblika

$$\nu : U \to S^2(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : -x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Gaussovo preslikavanje vremenske plohe (kojoj je vektor normale prostorni vektor) je oblika

$$\nu : U \to S^2(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_1 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Gaussovo preslikavanje je definirano formulom

$$\nu = \frac{f_u \times_1 f_v}{||f_u \times_1 f_v||_1}.$$

Plohe u prostoru Minkowskog (13/18)

Druga fundamentalna forma

Lema

Neka je $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ ploha čije je Gaussovo preslikavanje definirano kao u prethodnoj definiciji.
Za svaki $u \in U$ slika ravnine linearnog preslikavanja $D\nu|_u : T_uU \to T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3_1$ je paralelna sa tangencijalnom ravninom T_uf. Stoga možemo identificirati $T_{\nu(u)}\mathbb{R}^3_1 \cong T_{f(u)}\mathbb{R}^3_1 \leq \mathbb{R}^3_1$ i možemo zapisati da je u svakoj točki dobro definirano prelikavanje

$$D\nu|_u : T_uU \to T_uf.$$

Nadalje, restrikcijom na sliku, preslikavanje $Df|_u$ je linearni izomorfizam $Df|_u : T_uU \to T_uf$. U tom je slučaju i inverzno preslikavanje $(Df|_u)^{-1}$ također izomorfizam.

Weingartenovo preslikavanje

Preslikavanje $L := -D\nu \circ (Df)^{-1}$ zove se *Weingartenovo preslikavanje* ili *operator oblika plohe*.

Druga fundamentalna forma

Neka je $f : U \to \mathbf{R}$ ploha čije je Gaussovo preslikavanje $\nu : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3_1$. Za tangencijalne vektore X, Y definiramo *drugu diferencijalnu formu* **II** plohe f sa

$$< \mathbf{II}(X,Y), \nu >_1 = < LX, Y >_1,$$

odnosno

$$\mathbf{II}(X,Y) = < LX, Y >_1 < \nu, \nu >_1 \nu.$$

Zapisano koordinatno:

$$\mathbf{II}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j}\right) = h_{ij}\nu = \epsilon \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle_1 \nu,$$

gdje je $\epsilon =< \nu, \nu >_1 \in \{-1, 1\}$.

Gaussove (fundamentalne) veličine drugog reda

Neka je ploha M zadana parametarski sa $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Tada za plohu M definiramo funkcije $L, M, N : U \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$L := \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{11}$$

$$M := \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{12} = \epsilon \cdot h_{21}$$

$$N := \epsilon \cdot \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_j^2}, \nu \right\rangle_1 = \epsilon \cdot h_{22}$$

Plohe u prostoru Minkowskog (17/18)

Druga fundamentalna forma

Drugu fundamentalnu formu možemo prikazati na sljedeći način:

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Plohe u prostoru Minkowskog (18/18)

Gaussova i srednja zakrivljenost

Gaussova zakrivljenost

Gaussova zakrivljenost plohe u prostoru Minkowskog definirana je relacijom

$$K = \frac{det(h_{ij})}{det(g_{ij})} \cdot \epsilon = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \cdot \epsilon, \epsilon =< \nu, \nu >_1 .$$

Srednja zakrivljenost

Srednja zakrivljenost plohe u prostoru Minkowskog definirana je relacijom

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)} \cdot \epsilon, \epsilon =< \nu, \nu >_1 .$$

Minimalna ploha

Ploha $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ je minimalna ako je njena srednja zakrivljenost jednaka nuli, odnosno ako vrijedi $H = 0$.

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (1/17)

Definicija pravčastih ploha

Definicija pravčastih ploha

Ploha $f : U \to \mathbb{R}^3_1$ se naziva *pravčastom plohom* ako dopušta parametrizaciju

$$f(u, v) = c(u) + v \cdot X(u),$$

gdje je c diferencijabilna (ali ne nužno regularna) krivulja i X vektorsko polje duž krivulje c koje nigdje ne iščezava.

Lema - reparametrizacija pravčastih ploha

Neka je $f(s, t) = c(t) + s \cdot X(t)$ pravčasta ploha za koju vrijedi $\frac{dX}{dt} \neq 0$ u intervalu $t_1 < t < t_2$. Tada se ploha f može reparametrizirati na jedinstveni način:

$$f_*(u, v) = c_*(u) + v \cdot X_*(u),$$

tako da vrijedi: $X_* = \frac{X}{\|X\|_1}, \|X_*\|_1 = 1$ i $< c_*', X_*' >_1 = 0$.

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (2/17)

Definicija pravčastih ploha

Razvojne i vitopere plohe

- Pravčasta ploha kojoj je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli ($K = 0$) naziva se *razvojna ploha*.
- Pravčasta ploha kojoj je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki različita od nule ($K \neq 0$) naziva se *vitopera ploha*.

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (3/17)

Definicija pravčastih ploha

Klasifikacija razvojnih pravčastih ploha

- Cilindrične plohe su plohe parametrizacije $f(u,v) = c(u) + vX$, gdje je c regularna krivulja, a X konstantno jedinično polje duž krivulje c.
- Konusne plohe su plohe parametrizacije $f(u,v) = p + vX(u)$, gdje je p fiksna točka (krivulja c je degenerirala u točku). Konusne plohe nisu regularne u vrhu.
- Tangentne plohe su plohe parametrizacije $f(u,v) = c(u) + vc'(u)$, gdje je c regularna krivulja (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je parametrizirana duljinom lûka), a c' njezino tangencijalno polje.

$$f(u,v) = (v, \cos u - v\sin u, v\cos u + \sin u) =$$
$$= (0, \cos u, \sin u) + v \cdot (1, -\sin u, \cos u)$$

$$E = 1 + v^2 \quad F = 1 \quad G = 0 \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

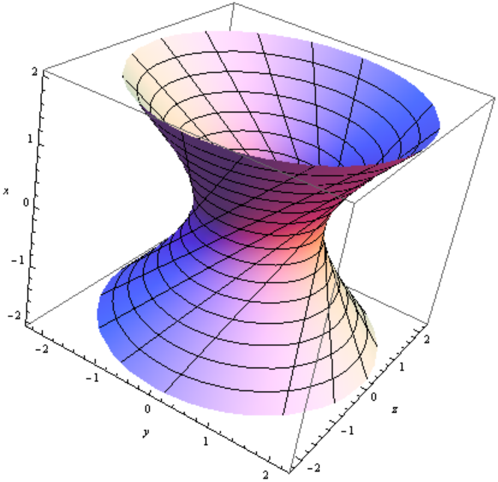
Vremenska ploha $\Rightarrow \epsilon =< \nu, \nu >_1 = 1$

$$f_u \times_1 f_v = (v, \cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u)$$
$$||f_u \times_1 f_v||_1 = 1$$

$$L = -1 - v^2 \quad M = -1 \quad N = 0 \qquad K = 1 \quad H = 1$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (5/17)

Primjeri pravčastih ploha - jednoplošni hiperboloid



Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (6/17)

Primjeri pravčastih ploha - cilindar

$$f(u,v) = (v, \sin u, \cos u) = (0, \sin u, \cos u) + v \cdot (1,0,0)$$

$$E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = -1 \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

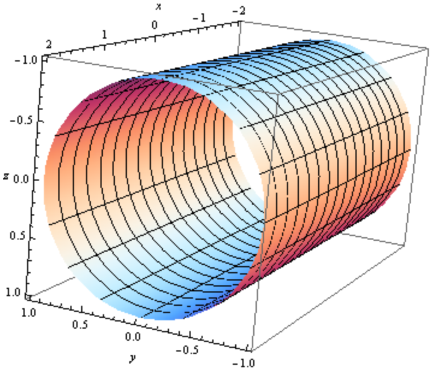
Vremenska ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = 1$

$$f_u \times_1 f_v = (0, -\sin u, -\cos u)$$
$$\|f_u \times_1 f_v\|_1 = 1$$

$$L = 1 \qquad M = 0 \qquad N = 0 \qquad K = 0 \qquad H = \frac{1}{2}$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (7/17)

Primjeri pravčastih ploha - cilindar



Primjeri pravčastih ploha - hiperbolički paraboloid (hipar)

$$f(u,v) = (u,v,uv) = (u,0,0) + v \cdot (0,1,u)$$

$$E = -1 + v^2 \qquad F = uv \qquad G = 1 + u^2$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

Prostorna ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = -1$

$$f_u \times_1 f_v = (v, -u, 1)$$

$$\|f_u \times_1 f_v\|_1 = \sqrt{|-v^2+u^2+1|}$$

$$\nu = \left(\frac{v}{\sqrt{|-v^2+u^2+1|}}, \frac{-u}{\sqrt{|-v^2+u^2+1|}}, \frac{1}{\sqrt{|-v^2+u^2+1|}} \right)$$

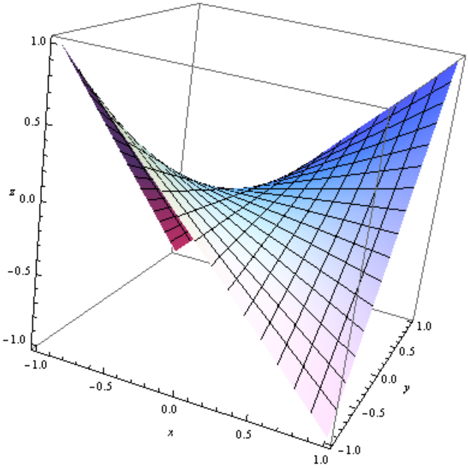
$$L = 0 \qquad M = \frac{-1}{\sqrt{|-v^2+u^2+1|}} \qquad N = 0$$

$$K = \frac{1}{(u^2-v^2+1)\sqrt{|u^2-v^2+1|}}$$

$$H = \frac{2uv}{(u^2-v^2+1)\sqrt{|u^2-v^2+1|}}$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (9/17)

Primjeri pravčastih ploha - hiperbolički paraboloid (hipar)



$$f(u,v) = (au, v\cos u, v\sin u) = (au,0,0) + v(0,\cos u,\sin u),\ a \neq 0$$

$$E = -a^2 + v^2 \qquad F = 0 \qquad G = 1 \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -a^2+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Za $|v| > a$ prostorna ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = -1$
Za $|v| < a$ prostorna ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = 1$

$$f_u \times_1 f_v = (v, -a\sin u, a\cos u) \qquad \|f_u \times_1 f_v\|_1 = \sqrt{|-v^2+a^2|}$$

$$\nu = \left(\frac{v}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{-a\sin u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}, \frac{a\cos u}{\sqrt{|-v^2+a^2|}}\right)$$

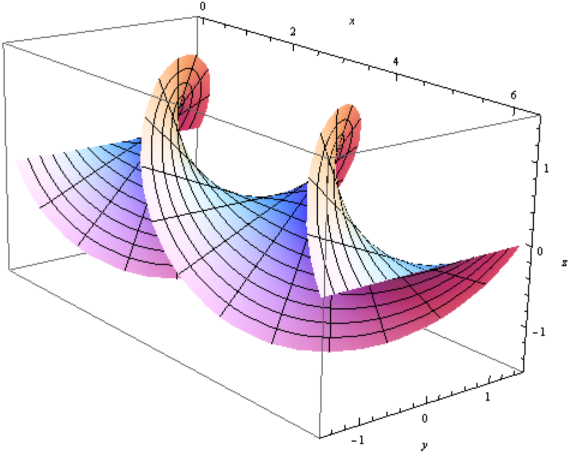
$$L = 0 \qquad M = \epsilon\frac{a}{\sqrt{|-v^2+a^2|}} \qquad N = 0$$

$$K = -\epsilon\frac{a^2}{(-a^2+v^2)\cdot|-v^2+a^2|} \qquad H = 0$$

$$K = \begin{cases} >0, & |v| > a \\ <0, & |v| < a \end{cases}$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (11/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 1



Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (12/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 2

$$f(u,v) = (v\sinh u, v\cosh u, au) = (0,0,au) + v(\sinh u, \cosh u, 0), a \neq 0$$

$$E = -v^2 + a^2 \qquad F = 0 \qquad G = 1$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Za $|v| < a$ prostorna ploha $\Rightarrow \epsilon =< \nu, \nu >_1 = -1$

Za $|v| > a$ vremenska ploha $\Rightarrow \epsilon =< \nu, \nu >_1 = 1$

$$f_u \times_1 f_v = (a\cosh u, a\sinh u, v)$$

$$\|f_u \times_1 f_v\|_1 = \sqrt{|-a^2 + v^2|}$$

$$\nu = \left(\frac{a\cosh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{a\sinh u}{\sqrt{|-a^2+v^2|}}, \frac{v}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \right)$$

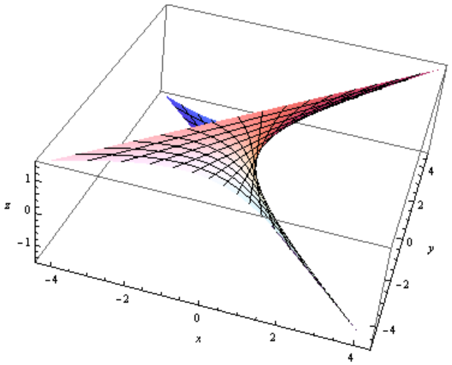
$$L = 0 \qquad M = \epsilon \frac{-a}{\sqrt{|-a^2+v^2|}} \qquad N = 0$$

$$K = -\epsilon \frac{a^2}{(-v^2+a^2)\cdot|-a^2+v^2|} \qquad H = 0$$

$$K = \begin{cases} > 0, & |v| < a \\ < 0, & |v| > a \end{cases}$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (13/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 2



Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (14/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 3

$$f(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, au) = (0,0,au) + v(\cosh u, \sinh u, 0), a \neq 0$$

$$E = v^2 + a^2 \qquad F = 0 \qquad G = -1 \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} v^2 + a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vremenska ploha $\Rightarrow \epsilon =< \nu, \nu >_1 = 1$

$f_u \times_1 f_v =$
$(a\sinh u, a\cosh u, -v)$
$\|f_u \times_1 f_v\|_1 = \sqrt{a^2 + v^2}$

$$\nu = \left(\frac{a\sinh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{a\cosh u}{\sqrt{a^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{a^2+v^2}} \right)$$

$L = 0$
$M = \frac{a}{\sqrt{a^2+v^2}}$
$N = 0$

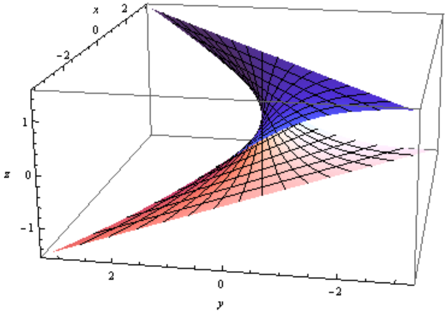
$K = \frac{a^2}{(v^2+a^2)^2}$

$H = 0$

$K > 0, \forall a \in \mathbb{R} \setminus 0$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (15/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 3



Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (16/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 4

$$f(u,v) = \left(a\left(\frac{u^3}{3}+u\right)+uv, a\left(\frac{u^3}{3}+u\right)-uv, au^2+v\right) =$$
$$= \left(a\left(\frac{u^3}{3}+u\right), a\left(\frac{u^3}{3}-u\right), au^2\right) + v(u,u,1), a \neq 0$$

$$E = -4av \qquad F = 0 \qquad G = 1 \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4av & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Za $av < 0$ prostorna ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = -1$

Za $av > 0$ vremenska ploha $\Rightarrow \epsilon = < \nu, \nu >_1 = 1$

$$f_u \times_1 f_v = (a + au^2 - v, -a + au^2 - v, 2au)$$
$$||f_u \times_1 f_v||_1 = 2\sqrt{|av|}$$
$$\nu = \left(\frac{a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{-a+au^2-v}{2\sqrt{|av|}}, \frac{2au}{2\sqrt{|av|}}\right)$$

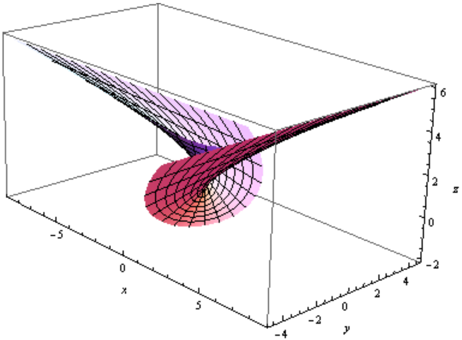
$$L = 0 \qquad M = \epsilon\frac{-a}{\sqrt{|av|}} \qquad N = 0$$

$$K = \epsilon\frac{-a^2}{4av|av|} \qquad H = 0$$

$$K < 0, \forall a \in \mathbb{R}\backslash 0$$

Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog (17/17)

Minimalne plohe - minimalna ploha 4



...za kraj...

.

..kraj jednog puta je početak drugog puta...