Logička algebra

Logički sklopovi

Uvod

Logička ili Booleova algebra je sustav teorema koji rabe simboličku logiku da bi opisali skupove elemenata i odnose među njima. Naziv je dobila po svom tvorcu, engleskom matematičaru George Booleu (1815.-1864.). On je u svom djelu *Matematička analiza logike* želio obraditi postupke deduktivnog logičkog razmišljanja, pri čemu ulazni podaci imaju samo dva stanja - istina ili laž. Razvojem digitalnih računala otkriveno je da je Booleova algebra vrlo dobro primjenjiva u konstruiranju i analizi rada računala jer takva računala također mogu imati samo dva stanja (uljučen-isključen, ima napona-nema napona).

Osnovni element logičke algebre jest **sud**. Sud je izjavna rečenica koja može biti ili istinita ili lažna, ali ne oboje u isto vrijeme.

Primjer:

- *"Ja predajem u gimnaziji"* jest sud, i to istinit
- *"Ja predajem povijest"* jest sud, i to lažni
- *"Koji je danas dan?"* nije izjavna rečenica, pa nije ni sud

Temeljno je svojstvo suda istinitost ili lažnost. Istinit sud označavamo simbolima $\top$ ili 1, a lažne simbolima $\perp$ ili 0. Mi ćemo koristiti simbole 1 za istinit i simbol 0 za lažan sud. Katkad cijelu izjavu obilježavamo jednim simbolom zbog jednostavnosti zapisa (npr. P = *"Danas je utorak."*).

Sudove možemo kombinirati u **logičke izraze**. Primjerice, sudove P = *"Danas je utorak"* i Q = *"Imamo sat informatike"*, možemo kombinirati u izraz *"Danas je utorak i imamo sat informatike"*. U logičkom izrazu izjave zovemo **operandima**, a veznik kojim smo povezali izjave zovemo **operator**.

Logičke operacije

Negacija (operator NE)

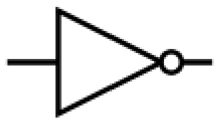
Negacija, ili operator NE (eng. NOT) je unarna operacija, što znači da imam samo jedan operand. Negacijom suda dobivamo novi sud. Postoji više načina zaoznačavanje negacije. Neki od njih su: P', $-P$, $\neg P$, $\overline{P}$. Mi ćemo označavati na slijedeći način: ako promatramo sud P, onda je negacija tog suda $\overline{P}$ i čitamo *"P potez"*.

Uzmimo za primjer sud P = *"Danas je utorak.* Negacija tog suda je sud $\overline{P}$ = *"Danas nije utorak"*. Ako je sud P istinit, onda je sud $\overline{P}$ lažan; ako je sud P lažan, onda je sud $\overline{P}$ istinit.

Sukladno uvedenim oznakama, to zapisujemo pregledno u obliku tablice stanja:

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Logički sklop (ponegdje možemo naići na pojam *logička vrata*!) NE shematski prikazujemo



Primjetimo: sklop NE ima jedan ulaz i jedan izlaz!

Konjunkcija (operator I)

Konjunkciju, odnosno operator I (eng. and) prikazujemo simbolom $\cap$, $\wedge$ ili &, pa onda jednostavnije zapisujemo $P \wedge Q$.

Promotrimo izraz koji smo prije izveli i pokušajmo nešto zaključiti o njegovoj (ne)istinosti.

Imamo 4 slučaja: kada su oba suda od kojih je izraz sastavljen lažna; kad je prvi lažan, drugi istinit; kad je prvi istinit, drugi lažan; te kad su oba suda istinita.

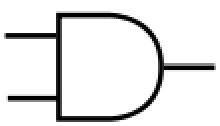
Ako danas *nije* utorak i *nemamo* sat informatike, onda je cjelokupni izraz lažan. Ako danas *nije* utorak i *učimo* informatiku, onda je izraz lažan. Ako danas *jest* utorak i *ne* učimo informatiku, onda je izraz lažan. Ako danas *jest* utorak i *učimo* informatiku, sud je istinit.

Iz gornje rasprave zaključujemo da je izraz istinit točno onda kada su istinita oba suda od kojih je sastavljen.

Prikažimo to preglednije tablicom stanja:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Logički sklop I prikazujemo shematski



Primjetimo: sklop I ima dva ulaza i jedan izlaz.

Disjunkcija (operator ILI)

Disjunkciju, odnosno operator ILI (eng. OR) prikazujemo simbolom $\cup$ ili $\vee$, pa izraz jednostavnije zapisujemo $P \vee Q$.

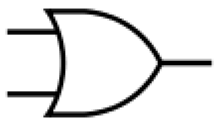
Kao primjer promotrimo izraz *"Struja teće kroz paralelni spoj kad je spuštena jedna ili druga sklopka"*.

Iz fizike znamo da će struja teći ako je u paralelnom spoju spuštena jedna (bilo koja) sklopka ili ako su spuštene obje sklopke. Iz toga zaključujemo da je izraz istinit kad je barem jedan sud istinit.

Prikažimo to tablicom stanja:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Logički sklop ILI shematski prikazujemo



Primjetimo: sklop ILI ima dva ulaza i jedan izlaz.

Implikacija (operator AKO..ONDA)

Implikaciju ili operator AKO..ONDA (eng. IF..THEN) prikazujemo simbolom $\rightarrow$, pa izraz jednostavnije zapisujemo $P \rightarrow Q$. Ovu operaciju još nazivamo **kondicional ili pogodba**.

Kao primjer promotrimo izraz *"Ako kiša pada, onda su ulice mokre"*.

Razmotrimo taj izraz. Ako kiša nije padala, i ulice nisu mokre, onda je izraz istinit. Ako kiša nije padala, i ulice nisu mokre... Je li izraz istinit? Mogu biti. Npr. čistač je upravo oprao ulicu. U slučaju da je kiša pala, onda su ulice mokre, pa je izraz istinit. Ako je kiša padala, a ulice nisu mokre, onda je očigledno izraz lažan.

Iz te rasprave zaključujemo da je izraz lažan ako je prvi sud istinit, a drugi lažan.

Prikažimo to tablicom stanja:

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ekvivalencija (operacija AKO I SAMO AKO, tj. ONDA I SAMO ONDA)

Ekivalencija, odnosno operator AKO I SAMO AKO, tj. ONDA I SAMO ONDA (eng. IF AND ONLY IF) prikazujemo simbolom $\leftrightarrow$, pa izraz jednostavnije zapisujemo $P \leftrightarrow Q$. Ovu operaciju još nazivamo **bikondicional ili dvopogodba**.

Kao primjer promotrimo izraz *"Mama peče kolače onda i samo onda kada tata kuha ručak.*

Razmotrimo taj izraz. Ako mama peče kolače, onda tata kuha ručak. Vrijedi i obrnuto: ako tata kuha ručak, onda mama peče kolače. Pa u ta dva slučaja zaključujemo da je izraz istinit. Ako mama ne peče kolače, a tata kuha ručak, izraz je očigledno lažan. Isto zakljulujemo ako mama peče kolače, a tata ne kuha ručak.

Iz te rasprave zaključujemo da je izraz istinit ako su oba suda ili istinita ili lažna.

Prikažimo to tablicom stanja:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1